UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Teoría de Elementos Finitos (408.634)

Viernes 21 de Julio de 2000 *Prof. Gabriel N. Gatica*

PARTE I (30 Puntos).

Demostrar las propiedades de aproximación del interpolante de Clément.

PARTE II (80 Puntos).

Problema 1 (10 Puntos). Calcule las coordenadas baricéntricas del 3-simplex (tetraedro) K de $\mathbf{R}^3$ determinado por los vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$, y calcule explícitamente las 4 funciones base de $P_2(K)$ asociadas a dichos vértices. (Notar que $\dim P_2(K) = \mathrm{card}\, \Sigma_2 = 10$).

Problema 2 (10 Puntos). Sea Ω un rectángulo de $\mathbf{R}^2$, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación uniforme de $\bar{\Omega}$ hecha de cuadrados K con lados (de longitud h) paralelos a los ejes coordenados. Considere la formulación variacional en $H_0^1(\Omega)$ de la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas, y calcule la matriz de rigidez local para el cuadrado de tipo (1) con vértices (x_1, y_1), (x_1+h, y_1), (x_1+h, y_1+h) y (x_1, y_1+h).

Problema 3 (10 Puntos). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y defina $H := H^1(\Omega)$ provisto de su producto escalar usual $< \cdot, \cdot >_H$. Considere un operador **nolineal** $T : H \to H$, **fuertemente monótono** y **Lipschitz-continuo**. Esto significa que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$< T(v) - T(w), v - w >_H \geq \alpha \, ||v - w||_H^2 \quad \text{y} \quad ||T(v) - T(w)||_H \leq M \, ||v - w||_H$$

para todo v, $w \in H$.

i) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $T(u) = f$.

ii) Sea H_h el subespacio de elementos finitos de H que resulta de una triangulación regular $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ hecha con triángulos de tipo (1), y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar* $u_h \in H_h$ *tal que*

$$< T(u_h), v_h >_H = < f, v_h >_H \quad \forall \, v_h \in H_h \, .$$

Suponga que $u \in H^2(\Omega)$ y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||u - u_h||_H \leq C \, h \, |u|_{H^2(\Omega)} \, .$$

Problema 4 (20 Puntos). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera poligonal, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación regular de $\bar{\Omega}$ hecha de n-simplex o n-rectángulos, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\hat{K}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{ h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h \}$, donde h_K es el diámetro de K. Ahora, para todo $K \in \mathcal{T}_h$ se define el operador local $\Pi_K : H^1(K) \to L^2(K)$ como

$$\Pi_K(v) \,:=\, \frac{1}{|K|} \int_K v(x)\, dx \quad \forall\, v \in H^1(K)\,.$$

Además, se define el operador global $\Pi : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ como

$$\Pi(v)\,|_K \,:=\, \Pi_K(v|_K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h,\ \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

a) Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$, tal que

$$||\, v \,-\, \Pi(v)\,||_{L^2(\Omega)} \;\leq\; C\, h\, |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

b) Defina el espacio $H_h := \{\, v_h \in L^2(\Omega) : \quad v_h\,|_K \in P_0(K)\ \forall\, K \in \mathcal{T}_h \,\}$, donde $P_0(K)$ denota el espacio de funciones constantes sobre K, y pruebe que

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \inf_{v_h \in H_h} ||v - v_h||_{L^2(\Omega)} \right\} \,=\, 0 \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)\,.$$

Problema 5 (30 Puntos). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Una formulación variacional **mixta** para la ecuación de Poisson en Ω, con dato $f \in L^2(\Omega)$, y condición de Dirichlet dada por $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, consiste en: *Hallar* $(\sigma, u) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{aligned} A(\sigma, \tau) \,+\, B(\tau, u) \,&=\, \int_\Gamma g\, \tau \cdot \nu\, ds\,, \\ B(\sigma, v) \,&=\, -\int_\Omega f\, v\, dx\,, \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $(\tau, v) \in X \times M$, donde $X := H(\mathrm{div}; \Omega)$, $M := L^2(\Omega)$, ν es el vector normal unitario exterior a Γ, y las formas bilineales $A : X \times X \to \mathbf{R}$ y $B : X \times M \to \mathbf{R}$ están definidas por

$$A(\rho, \tau) := \int_\Omega \rho \cdot \tau\, dx \quad \forall \rho,\, \tau \in X\,,$$

$$B(\tau, v) := \int_\Omega v\, \mathrm{div}\, \tau\, dx \quad \forall (\tau, v) \in X \times M\,.$$

a) Demuestre que A y B satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi, y concluya que existe $C_0 > 0$ tal que

$$||(\rho, w)||_{X \times M} \,\leq\, C_0 \sup_{\substack{(\tau, v) \in X \times M \\ ||(\tau, v)|| \,\leq\, 1}} \{\, A(\rho, \tau) + B(\tau, w) + B(\rho, v) \,\} \tag{2}$$

para todo $(\rho, w) \in X \times M$.

b) El siguiente objetivo es deducir una **estimación de error a-posteriori** para (1). Para ello, sea $\{\mathcal{T}_h : \quad h \in \mathtt{I}\}$ una familia regular de triangulaciones de $\bar{\Omega}$, donde $\mathtt{I}$ es un conjunto finito de parámetros dado por $\{h_1, ..., h_m\}$, con $h_j \geq h_{j+1}$ $\forall\, j \in \{1, ..., m\}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{\, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h \,\}$, donde h_K es el diámetro de K. Sea $X_h \times M_h$ un subespacio de elementos finitos de $X \times M$, asociado a la triangulación $\mathcal{T}_h$, y sea $(\sigma_h, u_h) \in X_h \times M_h$ la solución del esquema de Galerkin correspondiente para la formulación (1).

i) Pruebe que existe un único $\bar{\sigma} \in X$ tal que

$$\langle \bar{\sigma}, \tau \rangle_X \;=\; A(\sigma - \sigma_h, \tau) + B(\tau, u - u_h) \quad \forall\, \tau \in X\,.$$

ii) Defina $\mathbf{J}(\tau) := \frac{1}{2}\, ||\tau||_X^2 \;-\; \langle \bar{\sigma}, \tau \rangle_X \quad \forall\, \tau \in X$, y demuestre que

$$-\frac{1}{2}\, ||\bar{\sigma}||_X^2 \;=\; \min_{\tau \in X}\, \mathbf{J}(\tau)\,.$$

iii) Para cada $K \in \mathcal{T}_h$ defina $(\sigma_{h,K}, u_{h,K}) := (\sigma_h, u_h)\,|_K$, $X_K := H(\mathrm{div}; K)$, $M_K := L^2(K)$, y denote por $A_K : X_K \times X_K \to \mathbf{R}$ y $B_K : X_K \times M_K \to \mathbf{R}$, respectivamente, las restricciones de A y B al elemento K. Además, sea $\varphi_h \in H^{1/2}(\cup_{K \in \mathcal{T}_h} \partial K)$ una aproximación de u sobre las fronteras de los elementos K tal que $\varphi_h = g$ en Γ. Entonces, pruebe que existe un único $\hat{\sigma}_K \in X_K$ tal que

$$\langle \hat{\sigma}_K, \tau \rangle_{X_K} = -A_K(\sigma_{h,K}, \tau) - B_K(\tau, u_{h,K}) - \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau \cdot \nu\, ds \quad \forall\, \tau \in X_K\,.$$

iv) Defina

$$\mathbf{J}_K(\tau) := \frac{1}{2}\, ||\tau||_{X_K}^2 + A_K(\sigma_{h,K}, \tau) + B_K(\tau, u_{h,K}) + \int_{\partial K} \varphi_h\, \tau \cdot \nu\, ds$$

para todo $\tau \in X_K$, y pruebe que

$$-\frac{1}{2}\, ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \;=\; \min_{\tau \in X_K}\, \mathbf{J}_K(\tau)\,.$$

v) Use **i), ii), iii)** y **iv)** para demostrar que

$$||\bar{\sigma}||_X^2 \;\leq\; \sum_{K \in \mathcal{T}_h} ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2\,.$$

vi) Aplique (2) y **v)** para concluir que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||(\sigma, u) - (\sigma_h, u_h)||_{X \times M} \;\leq\; C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2},$$

donde

$$\eta_K^2 := ||\hat{\sigma}_K||_{X_K}^2 \;+\; ||f + \mathrm{div}\, \sigma_h||_{L^2(K)}^2 \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h\,.$$