UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Noviembre 27, 2003 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean $\Omega = (0,1)$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} -u'' + u' + u &= f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ u'(0) = u'(1) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) Establezca una formulación débil de (1) y demuestre que ella posee una única solución en $V := H^1(\Omega)$.

   (b) Dado $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, y una partición $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ de Ω, establezca el esquema de Galerkin asociado al espacio de elementos finitos

$$V_n := \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbf{P}_1([x_{j-1},x_j]) \quad \forall\, j \in \{2,...,n\} \right\},$$

   y comente sobre la estructura (rala, llena, banda ?) y las propiedades (simétrica, definida positiva ?) de la matriz de rigidez.

   (c) Considere una partición uniforme con $n = 3$ y calcule los elementos diagonales de la matriz de rigidez.

   (d) Deduzca condiciones suficientes sobre funciones κ_1, $\kappa_2 : \Omega \to \mathbf{R}$, de modo que (1) también posea una única solución en $H^1(\Omega)$ cuando la ecuación diferencial respectiva se reemplaza por: $\quad -u'' + \kappa_1\, u' + \kappa_2\, u = f \quad$ en $\quad \Omega$.

2. Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz-continua, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot}\,;\Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que } \mathrm{rot}\; v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

   provisto del producto escalar

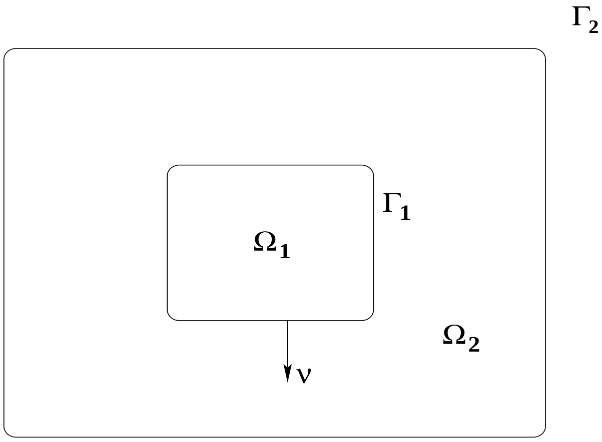
$$\langle v, w \rangle_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w\, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\; v \;\mathrm{rot}\; w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot}\,;\Omega)\,.$$

   Demuestre que $(H(\mathrm{rot}\,;\Omega); \langle\cdot,\cdot\rangle_{H(\mathrm{rot}\,;\Omega)})$ es un espacio de Hilbert. Además, pruebe que existe un operador lineal y continuo $\gamma : H(\mathrm{rot}\,;\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) = u \cdot \tau \;\forall\, u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector **tangencial** unitario de Γ.

3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ Lipschitz-continua, y considere el espacio $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Demuestre que existe una constant positiva C tal que $||v||_{H^1(\Omega)} \leq C\,||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in V$. Concluya que la norma $||\cdot||_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V.

4. Sea Ω_1 un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ_1, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ_1 y por una curva cerrada Γ_2 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_1$ (ver figura). Entonces, dados $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, y $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, interesa el siguiente **problema de transmisión**: Hallar $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tales que

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \quad -\Delta u_2 = f_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\ u_1 - u_2 &= g_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \quad u_2 = g_2 \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,. \end{aligned} \tag{2}$$



(a) Demuestre que una **formulación variacional mixta** de (2) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2) \in H(\text{div}\,; \Omega_1) \times H(\text{div}\,; \Omega_2)$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\xi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma_i \cdot \tau_i \, dx + \int_{\Omega_i} u_i \,\text{div}\, \tau_i \, dx \right\} + \langle \tau_1 \cdot \nu - \tau_2 \cdot \nu, \xi \rangle_{\Gamma_1} &= F(\boldsymbol{\tau})\,, \\ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i \,\text{div}\, \sigma_i \, dx + \langle \sigma_1 \cdot \nu - \sigma_2 \cdot \nu, \lambda \rangle_{\Gamma_1} &= G(\mathbf{v}, \lambda)\,, \end{aligned}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in H(\text{div}\,; \Omega_1) \times H(\text{div}\,; \Omega_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \tau_1 \cdot \nu, g_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \tau_2 \cdot \nu, g_2 \rangle_{\Gamma_2}\,,$$

y

$$G(\mathbf{v}, \lambda) := -\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f_i \, v_i \, dx\,.$$

(b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que la formulación anterior posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \xi)$ en los espacios indicados.