UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS (525539).

Octubre 29, 2004 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal y sea $\mathcal{T}_h$ una triangularización de $\bar{\Omega}$. Dado $K \in \mathcal{T}_h$, sea $\boldsymbol{\nu}_K$ el vector normal a ∂K y denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial K}$ la paridad dual entre $H^{-1/2}(\partial K)$ y $H^{1/2}(\partial K)$.

   (a) Defina los espacios

$$X := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v|_K \in H^1(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$Z := \Big\{ \boldsymbol{\lambda} := (\lambda_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{-1/2}(\partial K) : \quad \exists\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \text{ tal que } \quad \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K = \lambda_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

   y demuestre que

$$H_0^1(\Omega) := \Big\{ v \in X : \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \lambda_K, v|_K \rangle_{\partial K} = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\lambda} \in Z \Big\}.$$

   (b) Defina los espacios

$$\tilde{X} := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \boldsymbol{\tau}|_K \in H(\mathrm{div}\,;K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

$$\tilde{Z} := \Big\{ \boldsymbol{\xi} := (\xi_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \Pi_{K\in\mathcal{T}_h} H^{1/2}(\partial K) : \quad \exists\, v \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } \quad v = \xi_K \quad \text{en} \quad \partial K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

   y demuestre que

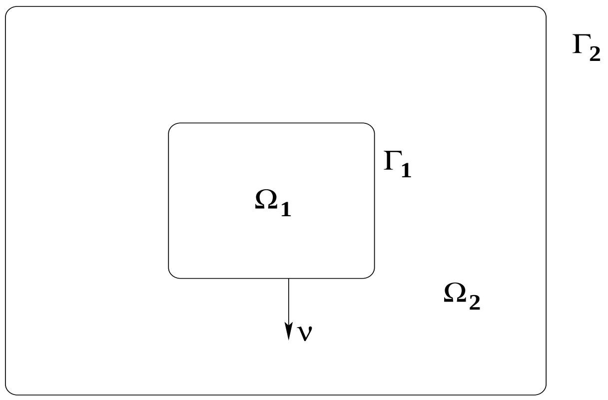
$$H(\mathrm{div}\,;\Omega) := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \tilde{X} : \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_K, \xi_K \rangle_{\partial K} = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \tilde{Z} \Big\}.$$

2. Sean H_h y Q_h subespacios de dimensión finita de espacios de Hilbert H y Q, respectivamente, y sean $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales acotadas que satisfacen las hipótesis de las versiones continua y discreta del Teorema de Babuška-Brezzi, con constantes independientes de h. Sean $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H \times Q$ y $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ las únicas soluciones de los problemas de punto-silla continuo y discreto, respectivamente, asociados a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Suponga que el kernel discreto de $\mathbf{b}$ está contenido en su kernel continuo y demuestre que existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_H \;\le\; C \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_H\,.$$

3. Sea Ω_1 un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ_1, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ_1 y por una curva cerrada Γ_2 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_1$ (ver figura). Entonces, dados $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, y $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, interesa el siguiente PROBLEMA DE TRANSMISIÓN: Hallar $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tales que

$$\begin{gathered} -\Delta u_1 = f_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \qquad -\Delta u_2 = f_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\ u_1 - u_2 = g_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \quad u_2 = g_2 \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,. \end{gathered} \tag{1}$$



(a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA-DUAL de (1) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2) \in H(\mathrm{div}\,; \Omega_1) \times H(\mathrm{div}\,; \Omega_2)$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\xi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma_i \cdot \tau_i \, dx + \int_{\Omega_i} u_i \,\mathrm{div}\, \tau_i \, dx \right\} + \langle \tau_1 \cdot \nu - \tau_2 \cdot \nu, \xi \rangle_{\Gamma_1} &= F(\boldsymbol{\tau})\,, \\ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i \,\mathrm{div}\, \sigma_i \, dx + \langle \sigma_1 \cdot \nu - \sigma_2 \cdot \nu, \lambda \rangle_{\Gamma_1} &= G(\mathbf{v}, \lambda)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in H(\mathrm{div}\,; \Omega_1) \times H(\mathrm{div}\,; \Omega_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \tau_1 \cdot \nu, g_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \tau_2 \cdot \nu, g_2 \rangle_{\Gamma_2} \quad \text{y} \quad G(\mathbf{v}, \lambda) := -\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f_i \, v_i \, dx\,.$$

(b) Defina el funcional de la energía complementaria y el operador Lagrangiano asociado a las ecuaciones de punto silla (2), e identifique los multiplicadores de Lagrange correspondientes.

(c) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (2) posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \xi)$ en los espacios indicados.

4. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno: $\quad -\Delta u = f \;$ en $\; \Omega, \quad u = 0 \;$ en $\; \partial\Omega$. Se puede demostrar que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dx + \int_\Omega u \, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx - \int_\Omega v \, \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx \tag{3}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω representa una incógnita adicional. Además, a partir de esta relación, y dado $\delta \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\delta \int_\Omega (\nabla u - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\nabla v + \boldsymbol{\tau}) \, dx = 0 \quad \forall \, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \tag{4}$$

y también

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) \, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx = - \int_\Omega f \, \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \, dx \quad \forall \, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega) \, . \tag{5}$$

De este modo, sumando (3), (4) y (5), se obtiene una formulación variacional mixta modificada, la cual tiene la forma: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}$ tal que

$$A((\boldsymbol{\sigma}, u), (\boldsymbol{\tau}, v)) = F(\boldsymbol{\tau}, v) \qquad \forall \, (\boldsymbol{\tau}, v) \in \mathbf{H} \, , \tag{6}$$

donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $F : \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal.

(a) Demuestre que, eligiendo δ convenientemente, el problema (6) tiene una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H} := H(\mathrm{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

(b) Defina explícitamente un subespacio $\mathbf{H}_h$ de $\mathbf{H}$, de dimensión finita, pruebe que el esquema de Galerkin asociado tiene una única solución y deduzca la razón de convergencia correspondiente según la regularidad de la solución exacta.

5. Sean $\Omega =]a, b[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno

$$u^{(4)} = f \quad \text{en} \quad \Omega \, , \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0 \, . \tag{7}$$

(a) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (7) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in \mathbf{H} := H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma \, \tau \, dx + \int_\Omega u' \, \tau' \, dx &= 0 \qquad \forall \, \tau \in H^1(\Omega) \, , \\ \int_\Omega v' \, \sigma' \, dx &= - \int_\Omega f \, v \, dx \qquad \forall \, v \in H_0^1(\Omega) \, . \end{aligned} \tag{8}$$

(b) Aplique la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (8) tiene una única solución que depende continuamente del dato f.

(c) Defina explícitamente un subespacio $\mathbf{H}_h$ de $\mathbf{H}$, de dimensión finita, pruebe que el esquema de Galerkin asociado tiene una única solución y deduzca la razón de convergencia correspondiente según la regularidad de la solución exacta.