UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401).

Viernes 17 de Mayo de 2002 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

Problema 1 (20 Puntos).

a) Sea S un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $S^{\perp} = \bar{S}^{\perp}$.

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. Encuentre y caracterice el subespacio V de $H^1(\Omega)$ tal que $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus V$.

Problema 2 (20 Puntos).
Sean H un espacio de Hilbert, $A : H \times H \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, y $F \in H'$. Además, sea $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $n \in \mathbf{N}$ considere una forma bilineal acotada $A_n : H_n \times H_n \to \mathbf{R}$ tal que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es uniformemente elíptica. Esto significa que existe $\tilde{\alpha} > 0$, independiente de n, tal que $A_n(v_n, v_n) \geq \tilde{\alpha}\, \|v_n\|_H^2 \ \forall\, v_n \in H_n, \forall\, n \in \mathbf{N}$.

a) Pruebe que existen únicos $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u, v) \,=\, F(v) \qquad \forall\, v \in H$$

y

$$A_n(u_n, v_n) \,=\, F(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

b) Demuestre que existe $C > 0$, independiente de $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \,\leq\, C \inf_{v_n \in H_n} \left\{ \|u - v_n\|_H \,+\, \sup_{\substack{w_n \in H_n \\ w_n \neq 0}} \frac{|A(v_n, w_n) - A_n(v_n, w_n)|}{\|w_n\|_H} \right\}.$$

Problema 3 (20 Puntos).
Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$, y sea $\kappa : \Omega \to \mathbf{R}$ una función continua para la cual existen constantes $M, \beta > 0$, tales que $\beta \leq \kappa(x) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Defina el conjunto $S := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\}$, y demuestre que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe un único $g \in S$ tal que

$$\int_\Omega \kappa(x)\, \|\nabla u(x) - \nabla g(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2\, dx \,=\, \min_{v \in S} \int_\Omega \kappa(x)\, \|\nabla u(x) - \nabla v(x)\|_{\mathbf{R}^n}^2\, dx\,.$$

Problema 4 (20 Puntos).
Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert, y sea $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(H,Q)$ con espacio nulo $V := N(\mathbf{B})$.

a) Demuestre que $\displaystyle \sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \qquad \forall\, q \in Q.$

b) Suponga que existe $\beta > 0$ tal que $\displaystyle \sup_{\substack{v\in V^\perp\\ v\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{B}(v), q\rangle_Q}{\|v\|_H} \geq \beta\,\|q\|_Q \quad \forall\, q \in Q$, y pruebe que $H = R(\mathbf{B}^*) \oplus V$.

Problema 5 (20 Puntos).

a) Sean X, Y espacios de Banach, y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado. Considere $\mathcal{D}(A)$ provisto de la norma $\|x\|_A := \|x\|_X + \|A(x)\|_Y$, y demuestre que $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ es completo.

b) Sean X, Y espacios de Banach, y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal tal que $N(A) = \{0\}$ y $R(A) = Y$. Suponga que $\mathcal{D}(A)$ y el grafo G_A son subespacios cerrados de X y $X \times Y$, respectivamente. Demuestre que existe A^{-1} y que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, \mathcal{D}(A))$.