UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Análisis Funcional I (522401)

Martes 24 de Abril de 2001 — *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (20 Puntos).

a) Sea S un subconjunto de un Hilbert H y sea M el subespacio cerrado generado por S. Pruebe que: $S^\perp$ es un subespacio cerrado de H, $M^\perp = S^\perp$, y $M = (S^\perp)^\perp$.

b) Sea V un subespacio de un Hilbert H. Demuestre que $H = \overline{V} \oplus V^\perp$.

Problema 2 (20 Puntos). Enuncie y demuestre el teorema, lema o resultado importante que más le haya llamado la atención.

Problema 3 (30 Puntos). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. **El problema de Stokes** consiste en encontrar el vector de velocidades $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$ y la presión p de un fluído, tales que

$$\begin{aligned} -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathbf{u} = \mathbf{O} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, &\qquad \int_\Omega p\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{P}$$

Defina los espacios $H := [H_0^1(\Omega)]^2$ y $Q := \{\, q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q\,dx = 0 \,\}$. Demuestre que la formulación débil de (P) se reduce a: *encontrar* $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ *tales que*:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},p) &= F(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H\,, \\ B(\mathbf{u},q) &= 0 \quad \forall\, q \in Q\,, \end{aligned}$$

donde $A : H \times H \to \mathbf{R}$, $B : H \times Q \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, están definidos por

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i\,dx\,,$$

$$B(\mathbf{v},p) := -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \quad , \quad F(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx\,.$$

Problema 4 (30 Puntos).

a) Sea $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de **Hilbert**. Dados $n \in \mathbf{N}$, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq H$ y $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subseteq H'$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} F_j(u)\, p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A^* : H \to H$.

b) Sea $(H, < \cdot, \cdot >)$ el espacio de **Hilbert** $L^2(0,1)$ provisto del producto escalar

$$< u, v > := \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt \qquad \forall\, u\,,\ v \in H\,.$$

Dados los polinomios $p_j \in H$, $j \in \{1, ..., n\}$, con $p_j(t) = t^j\ \forall\, t \in (0,1)$, se define el operador $A : H \to H$ como

$$A(u) := \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in H\,.$$

Demuestre que A es lineal, acotado y **autoadjunto**, esto es $A \in \mathcal{L}(H, H)$ y $A = A^*$.