UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Análisis Funcional I (522401)

Miércoles 7 de Junio de 2000 *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (20 Puntos). Sea $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de Hilbert y considere un operador **nolineal** $T : H \to H$, **fuertemente monótono** y **Lipschitz-continuo**. Esto significa, respectivamente, que existen constantes $\alpha, M > 0$ tales que

$$< Tv - Tw, v - w > \geq \alpha \, ||v - w||_H^2 \quad \text{y} \quad ||Tv - Tw||_H \leq M \, ||v - w||_H \quad \forall \, v, \, w \in H \, .$$

a) Dada $f \in H$, demuestre que existe un único $u \in H$ tal que $Tu = f$.

b) Sea H_n un subespacio de dimensión finita de H y considere el esquema de Galerkin asociado: *Hallar* $u_n \in H_n$ *tal que* $< Tu_n, v_n > = < f, v_n > \; \forall \; v_n \in H_n$. Pruebe que

$$||u - u_n||_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in H_n} ||u - v_n||_H \, .$$

Ind.: Para **a)**, aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach al operador $P : H \to H$, con $Pv := v - \rho(Tv - f)$, donde ρ es un parámetro a elegir de manera conveniente.

Problema 2 (20 Puntos). Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{div}; \Omega) := \{ \, v \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\, v := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \, \}$$

provisto del producto escalar

$$< v, w >_{H(\mathrm{div};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v \; \mathrm{div}\, w \, dx \quad \forall \, v, \, w \in H(\mathrm{div}; \Omega) \, .$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{div}; \Omega); < \cdot, \cdot >_{H(\mathrm{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

b) Pruebe que para todo $g \in [L^2(\Omega)]^n$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{div}; \Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v_g \; \mathrm{div}\, w \, dx = \int_\Omega g \cdot w \, dx \quad \forall \, w \in H(\mathrm{div}; \Omega) \, .$$

Ind.: Dada $v \in [L^2(\Omega)]^n$, se dice que $\mathrm{div}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si: $- \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega z \, \varphi \, dx \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \, .$

Problema 3 (10 Puntos). Enuncie y demuestre el teorema, lema o resultado importante que más le haya llamado la atención.

Problema 4 (10 Puntos). Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados y sean $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z,X)$. Demuestre que $(AB)' = B'\,A'$. Suponga que A es invertible y demuestre que A' tambien lo es, con $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Problema 5 (15 Puntos). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y defina el espacio $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) : \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \right\}.$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$||v||_{H^1(\Omega)} \leq C\,||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in V.$$

Ind.: Dada $v \in V$, defina $f = -\Delta\, v \in L^2(\Omega)$ y aplique el Lema de Lax-Milgram al problema de valores de contorno: $-\Delta\, u = f$ en Ω, $u = 0$ en Γ.

Problema 6 (15 Puntos).

a) Sea S un subconjunto de un Hilbert X y sea M el subespacio cerrado generado por S. Pruebe que $M^\perp = S^\perp$ y que $M = (S^\perp)^\perp$.

b) Sean X, Y espacios de Hilbert y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Demuestre que $R(A)^\perp = N(A^*)$ y concluya que $R(A)$ es cerrado sí y sólo sí $R(A) = N(A^*)^\perp$.

Problema 7 (15 Puntos). Sean X, Y espacios de Hilbert y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $R(A)$ es cerrado. Demuestre explícitamente, con todos los detalles posibles, que $R(A^*) = N(A)^\perp$.

Problema 8 (15 Puntos). Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados los polinomios $p_j \in X$, $j \in \{0,1,...,n\}$, con $p_j(t) = t^j\ \forall\, t \in [0,1]$, se define el operador $A : X \to X$ como

$$A(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \qquad \forall\, u \in X.$$

Demuestre que $A \in \mathcal{L}(X,X)$ y encuentre explícitamente el operador adjunto $A' : X' \to X'$.

Ind.: Para todo $j \in \{0,1,...,n\}$ defina $F_j : X \to \mathbf{R}$ por $F_j(u) := \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt$ $\forall\, u \in X$, y observe que $F_j \in X'$.