UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

P R U E B A 1

Tópicos de Elementos Finitos I (4220018)
Métodos de Elementos Finitos Mixtos (525539)

Lunes 23 de Mayo de de 2016 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, y sea $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^n$. El problema de Navier-Stokes con viscosidad variable $\mu : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ consiste en encontrar la velocidad $\boldsymbol{u}$ y la presión p de un fluido que ocupa la región Ω, tal que

$$\begin{aligned} -\mathbf{div}\big(\mu(|\nabla\boldsymbol{u}|)\,\nabla\boldsymbol{u}\big) + (\nabla\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \boldsymbol{u} &= \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \end{aligned} \tag{1}$$

   a) Incorpore una condición de unicidad para la presión, introduzca las incógnitas auxiliares $\boldsymbol{\sigma} := \mu(|\nabla\boldsymbol{u}|)\,\nabla\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) - p\,\mathbb{I}$ y $\boldsymbol{t} := \nabla\boldsymbol{u}$ en Ω, elimine fundadamente p, y demuestre que (1) se transforma, equivalentemente, en el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} \nabla\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \mu(|\boldsymbol{t}|)\,\boldsymbol{t} - (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathtt{d}} &= \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} \quad \text{en}\ \Omega\,, \\ -\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) = 0\,, \quad \boldsymbol{u} &= \mathbf{0} \quad \text{en}\ \Gamma\,. \end{aligned} \tag{2}$$

   b) Sea $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + c\,\mathbb{I}$, con $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega) := \big\{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) : \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta}) = 0\big\}$, y $c \in \mathrm{R}$, y deduzca de (2) que $c = -\frac{1}{n\,|\Omega|}\int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$.

   c) Defina $\mathbb{L}^2(\Omega) := [\mathrm{L}^2(\Omega)]^{n\times n}$ y $\mathbb{L}^2_{\mathtt{tr}}(\Omega) := \Big\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \operatorname{tr}\boldsymbol{s} = 0\Big\}$, y demuestre que la formulación variacional de (2) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{L}^2_{\mathtt{tr}}(\Omega) \times \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)$, y $\boldsymbol{u}$ en un espacio por definir, tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mu(|\boldsymbol{t}|)\,\boldsymbol{t} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{s} - \int_\Omega (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{s} &= 0 && \forall\,\boldsymbol{s} \in \mathbb{L}^2_{\mathtt{tr}}(\Omega)\,, \\ \int_\Omega \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{t} + \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} &= 0 && \forall\,\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)\,, \\ -\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\mathbf{v} && \forall\,\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\,. \end{aligned}$$

   d) Aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la inyección continua de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ en $\mathbf{L}^4(\Omega) := [\mathrm{L}^4(\Omega)]^n$ para deducir que un espacio factible para $\boldsymbol{u}$ en c) está dado por $\mathbf{H}^1_0(\Omega) := [\mathrm{H}^1_0(\Omega)]^n$.

NOTACION. Dados $\mathbf{w} = (w_i)_{i=1}^n$, $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^n$, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{ij})_{i,j=1}^n$, y $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^n$, se definen los productos $\mathbf{w}\otimes\mathbf{u} := (w_i\,u_j)_{i,j=1}^n$ y $\boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\tau} := \sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij}\,\tau_{ij}$, y el tensor $\boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}} := \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau})\,\mathbb{I}$.

2. Sean H_1, H_2, Q_1, Q_2 espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sean $a : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ y $b_j : H_j \times Q_j \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2\}$, formas bilineales acotadas con operadores inducidos $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j, Q_j)$, $j \in \{1, 2\}$, respectivamente. También, sea V_j el espacio nulo de $\mathbf{B}_j$, $j \in \{1, 2\}$, y sea Π_2 el proyector ortogonal de H_2 en V_2. Suponga que:

   i) $\Pi_2\, \mathbf{A} : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo.

   ii) existen β_1, $\beta_2 > 0$ tales que

$$\|\mathbf{B}_j^*(v)\|_{H_j} := \sup_{\substack{\tau \in H_j \\ \tau \neq 0}} \frac{b_j(\tau, v)}{\|\tau\|_{H_j}} \geq \beta_j \, \|v\|_{Q_j} \quad \forall\, v \in Q_j, \quad \forall\, j \in \{1, 2\}\,.$$

   a) Pruebe que, dados $F \in H_2'$ y $G \in Q_1'$, existe un único $(\sigma, u) \in H_1 \times Q_2$ tal que

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) \, + \, b_2(\tau, u) \;&=\; F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H_2\,, \\ b_1(\sigma, v) \;&=\; G(v) \quad \forall\, v \in Q_1\,, \end{aligned}$$

   y

$$\|(\sigma, u)\| \, \leq \, C \left\{ \|F\|_{H_2'} \, + \, \|G\|_{Q_1'} \right\},$$

   donde $C > 0$ es una constante independiente de F, G, y la solución (σ, u).

   b) Considere subespacios de elementos finitos $\left\{H_{1,n}\right\}_{n \in \mathbf{N}}$, $\left\{H_{2,n}\right\}_{n \in \mathbf{N}}$, $\left\{Q_{1,n}\right\}_{n \in \mathbf{N}}$, y $\left\{Q_{2,n}\right\}_{n \in \mathbf{N}}$ de H_1, H_2, Q_1, y Q_2, respectivamente, defina el esquema de Galerkin asociado, y deduzca la estimación de Cea correspondiente.

3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, considere el problema de Neumann:

$$-\,\Delta\, u \, + \, u \, = \, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \, = \, g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{3}$$

   donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal exterior a Γ.

   a) Defina incógnitas auxiliares convenientes y demuestre que una formulación mixta de (3) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in H(\mathrm{div}; \Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathrm{div}\,,\Omega} \, + \, \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}, \varphi \rangle_\Gamma \;&=\; -\int_\Omega f \, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}; \Omega)\,, \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}, \psi \rangle_\Gamma \;&=\; \langle g, \psi \rangle_\Gamma \quad \forall\, \psi \, \in \, H^{1/2}(\Gamma)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

   donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{div}\,,\Omega}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denotan el producto interior de $H(\mathrm{div}; \Omega)$ y la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente.

   b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (4) posee una única solución, la cual depende contínuamente de los datos f y g.

4. En la formulación mixta del problema de elasticidad lineal en $\mathbb{R}^2$ con condiciones de contorno de Dirichlet aparece la forma bilineal $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ dada por

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta \qquad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) \in H \times Q\,,$$

donde $H := H(\mathbf{div}; \Omega)$ y $Q := Q_1 \times Q_2$, con $Q_1 := [L^2(\Omega)]^2$ y $Q_2 := [L^2(\Omega)]^{2\times 2}_{\mathtt{asim}}$. Notar que b puede descomponerse como $b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \eta)) = b_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) + b_2(\boldsymbol{\tau}, \eta)$, donde $b_1 : H \times Q_1 \to \mathbb{R}$ y $b_2 : H \times Q_2 \to \mathbb{R}$ están dadas por

$$b_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\tau} \qquad \text{y} \qquad b_2(\boldsymbol{\tau}, \eta) := \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\,.$$

Sean H_h, $Q_{1,h}$ y $Q_{2,h}$ subespacios de elementos finitos de H, Q_1 y Q_2, respectivamente, y suponga que existen operadores $\Pi_{i,h} : H \to H_h$, $i \in \{1, 2\}$, uniformemente acotados (con respecto a h), tales que para todo $\boldsymbol{\tau} \in H$:

i) $b_1(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}_h) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$,

ii) $b_1(\Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{v}_h) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{v}_h \in Q_{1,h}$,

iii) $b_2(\boldsymbol{\tau} - \Pi_{1,h}(\boldsymbol{\tau}) - \Pi_{2,h}(\boldsymbol{\tau}), \eta_h) = 0 \qquad \forall\, \eta_h \in Q_{2,h}$.

Demuestre que existe $\beta > 0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in H_h \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, (\mathbf{v}_h, \eta_h))}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_H} \geq \beta\, \|(\mathbf{v}_h, \eta_h)\|_Q \qquad \forall\, (\mathbf{v}_h, \eta_h) \in Q_h := Q_{1,h} \times Q_{2,h}\,.$$

Alumnos de Postgrado: elegir 3 problemas, uno de ellos el 1
Alumnos de Pregrado: elegir 2 problemas, uno de ellos el 1 o el 2.

GGP/ggp