UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

TÓPICOS DE ELEMENTOS FINITOS I (4220018).

Viernes, 20 de Junio de 2014 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ tal que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ y $|\Gamma_D| > 0$, y sea $\boldsymbol{\nu}$ el vector normal a Γ. Dados $\mathbf{f} \in [C(\bar{\Omega})]^n$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, el problema de Darcy con presión dependiente de la porosidad consiste en encontrar la velocidad $\mathbf{u}$ y la presión p de un fluido, tales que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = p\,\mathbf{f} + \nabla p \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ p = g \quad \text{en} \quad \Gamma_D\,, \quad \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N\,. \end{aligned} \tag{1}$$

   a) Demuestre que la formulación variacional mixta de (1) se reduce a: Hallar $(\mathbf{u}, p) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v},p) &= \langle \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}, g\rangle_D + \int_\Omega p\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v}\in H\,, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u},q) &= 0 \qquad \forall\, q\in Q\,, \end{aligned} \tag{2}$$

   donde $H := \Big\{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div};\Omega) : \quad \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N\Big\}$, $Q := L^2(\Omega)$, $\mathbf{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales dadas por

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(\mathbf{v},q) := \int_\Omega q\operatorname{div}\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{u},\,\mathbf{v}\in H\,, \quad \forall\, q\in Q\,,$$

   y $\langle\cdot,\cdot\rangle_D$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $H^{1/2}(\Gamma_D)$.

   b) Pruebe que (2) puede re-escribirse, equivalentemente, como una ecuación de punto fijo de la forma $(\mathbf{u}, p) = T(\mathbf{u}, p)$, donde, gracias a la Teoría de Babuška-Brezzi, $T : H \times Q \to H \times Q$ es un operador no-lineal bien definido. De hecho, utilice el principio de superposición para darse cuenta que en realidad T es una aplicación afín. Luego, aplique el Teorema del Punto Fijo de Banach para concluir que si $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega} := \sup\limits_{x\in\Omega} \|\mathbf{f}(x)\|$ es suficientemente pequeño, entonces el problema (2) tiene una única solucion. Pruebe en tal caso que existe $C > 0$, dependiente de $\|\mathbf{f}\|_{\infty,\Omega}$, tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{\operatorname{div},\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \le C\,\|g\|_{1/2,\Gamma_D}\,.$$

   c) Defina un esquema de Galerkin estable para el problema en a) y establezca las cotas de error a priori y razones de convergencia correspondientes.

2. Sean Ω_B y Ω_D dominios acotados y simplemente conexos de $\mathbb{R}^2$ con fronteras Lipschitz-continuas tales que $\partial\Omega_B \cap \partial\Omega_D \;=:\; \Sigma \neq \emptyset$, y sea $\Omega \;:=\; \Omega_B \cup \Sigma \cup \Omega_D$ con frontera $\Gamma \;=\; \partial\Omega$ separada en Γ_B y Γ_D. Entonces, dados $\mathbf{f}_B \in \mathbf{L}^2(\Omega_B)$ y $\mathbf{f}_D \in \mathbf{L}^2(\Omega_D)$, el Problema Acoplado de Brinkman-Darcy consiste en hallar velocidades $\mathbf{u}_B$ y $\mathbf{u}_D$, y presiones p_B y p_D, tales que

$$\begin{aligned}
\alpha\,\mathbf{u}_B \,-\, \mu\,\Delta\,\mathbf{u}_B \,+\, \nabla p_B &= \mathbf{f}_B && \text{en} \quad \Omega_B\,,\\
\operatorname{div}\mathbf{u}_B &= 0 && \text{en} \quad \Omega_B\,,\\
\mu\,\mathbf{u}_D \,+\, \nabla p_D &= \mathbf{f}_D && \text{en} \quad \Omega_D\,,\\
\operatorname{div}\mathbf{u}_D &= 0 && \text{en} \quad \Omega_D\,,\\
\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n} \,-\, \mathbf{u}_D\cdot\mathbf{n} &= 0 && \text{en} \quad \Sigma\,,\\
p_B \,-\, p_D &= 0 && \text{en} \quad \Sigma\,,\\
\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{n} &= 0 && \text{en} \quad \Gamma_B\,,\\
\mathbf{u}_D\cdot\mathbf{n} &= 0 && \text{en} \quad \Gamma_D\,,
\end{aligned} \tag{3}$$

donde $\nu > 0$ es la viscosidad cinemática del fluido, $\mu > 0$ es una constante que depende de la viscosidad y de la permeabilidad del medio poroso Ω_D, y $\alpha > 0$ es un parámetro usualmente de gran tamaño. Deduzca una formulación completamente mixta de (3), y analice su solubilidad continua y discreta. Si es necesario, considere condiciones de contorno adicionales.

3. Sea Ω_1 un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ. Además, sean $\gamma_0^1 : \mathbf{H}^1(\Omega_1) \to \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^2 : \mathbf{H}^1(\Omega_2) \to \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega \;:=\; \Omega_1 \,\cup\, \Gamma \,\cup\, \Omega_2$. Dados $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega_1)$, $\mathbf{f}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\mathbf{g}_\Gamma \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{g}_\Sigma \in \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión en elasticidad lineal

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\sigma}_1 \,=\, \mathcal{C}_1\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_1 \,=\, \mathbf{f}_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,,\\
\boldsymbol{\sigma}_2 \,=\, \mathcal{C}_2\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_2) \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_2 \,=\, \mathbf{f}_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,,\\
\gamma_0^1(\mathbf{u}_1) \,-\, \gamma_0^2(\mathbf{u}_2) \,=\, \mathbf{g}_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1(\boldsymbol{\sigma}_1) \,=\, \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2(\boldsymbol{\sigma}_2) \quad \text{en} \quad \Gamma\,,\\
\gamma_0^2(\mathbf{u}_2) \,=\, \mathbf{g}_\Sigma \quad \text{en} \quad \Sigma\,,
\end{gathered} \tag{4}$$

donde $\mathcal{C}_i \,:\, \mathbb{L}^2(\Omega_i) \,\to\, \mathbb{L}^2(\Omega_i)$, $i \in \{1,2\}$, son los operadores lineales de Hooke en los dominios Ω_1 y Ω_2, respectivamente, y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1 \,:\, \mathbb{H}(\operatorname{div};\Omega_1) \,\to\, \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2 : \mathbb{H}(\operatorname{div};\Omega_2) \to \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales correspondientes ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω_2 en Γ y hacia el exterior de Ω_2 en Σ).

a) Demuestre que la formulación mixta de (4) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega_1) \times \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega_2)$, $\mathbf{u} \,:=\, (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \,\in\, \mathbf{L}^2(\Omega_1) \times \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\boldsymbol{\rho} \,:=\, (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \,\in\, \mathbb{L}^2_{\mathtt{asim}}(\Omega_1) \times \mathbb{L}^2_{\mathtt{asim}}(\Omega_2)$, y $\boldsymbol{\xi} \,\in\, \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, tales que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \mathcal{C}_i^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}_i : \boldsymbol{\tau}_i + \widetilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})) + \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1(\boldsymbol{\tau}_1) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2(\boldsymbol{\tau}_2), \boldsymbol{\xi} \rangle_\Gamma &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})\,,\\
\widetilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \eta)) + \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^1(\boldsymbol{\sigma}_1) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^2(\boldsymbol{\sigma}_2), \boldsymbol{\lambda} \rangle_\Gamma &= \mathbf{G}(\mathbf{v}, \eta, \boldsymbol{\lambda}),
\end{aligned}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \in \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega_1) \times \mathbb{H}(\mathbf{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega_1) \times \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\eta := (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{L}^2_{\mathtt{skew}}(\Omega_1) \times \mathbb{L}^2_{\mathtt{skew}}(\Omega_2)$, y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, donde $\widetilde{\mathbf{b}}$ es una forma bilineal, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denota la paridad dual entre $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son funcionales lineales y acotados que dependen de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}_\Gamma$ y $\mathbf{g}_\Sigma$.

b) Aplique el Teorema de Babuška-Brezzi para concluir que el problema en a) posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}))$, la cual depende continuamente de los datos.

c) Defina un esquema de Galerkin estable para el problema en a) y establezca las cotas de error a priori y razones de convergencia correspondientes.

Elija dos problemas. Uno ahora y el otro para el lunes en la mañana

---

GNG/gng