

PRUEBA 1

TÓPICOS DE ELEMENTOS FINITOS I (4220018).

Viernes, 2 de Julio de 2010

Prof. Gabriel N. Gatica.

1. Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , $n \in \{2, 3\}$, con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y vector normal $\boldsymbol{\nu}$. Dados $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^n$ y $\mathbf{g} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^n$, la formulación en desplazamiento del problema de elasticidad lineal con condiciones de contorno de Dirichlet, consiste en: Hallar $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n$ tal que

$$-\mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{en } \Gamma, \quad (1)$$

donde $\lambda, \mu > 0$ son las constantes de Lamé del material respectivo.

- a) Defina el pseudoefuerzo $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} := \mu \nabla \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I}$ en Ω , y recuerde que $\mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega) = H_0 \oplus \mathbb{R} \mathbf{I}$, donde

$$H_0 := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega) : \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \right\}$$

e \mathbf{I} es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Luego, considere la descomposición $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + c \mathbf{I}$, con $\boldsymbol{\sigma} \in H_0$, $c \in \mathbb{R}$, denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma)]^n$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^n$, y demuestre que (1) da origen a la siguiente formulación mixta: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^n$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\tau}^d + \frac{1}{n(n\lambda + (n+1)\mu)} \int_{\Omega} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} &= F(\boldsymbol{\tau}), \\ \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= G(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (2)$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in H_0 \times [L^2(\Omega)]^n$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \mathbf{g} \rangle - \frac{1}{n|\Omega|} \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} \int_{\Omega} \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega),$$

y

$$G(\mathbf{v}) := - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^n.$$

- b) Use la teoría de Babuška-Brezzi para probar que (2) está bien propuesto.
 c) Use la teoría de Babuška-Brezzi discreta para definir, explícitamente, un esquema de Galerkin estable para (2).

2. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^2 con frontera poligonal Γ , y sea $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones regulares de $\bar{\Omega}$, cada una de ellas hecha de triángulos K con diámetro h_K y lados e con longitud h_e . Entonces, se definen los subespacios:

$$X_h := \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$\Lambda_h := \left\{ \lambda_h \in C(\Gamma) : \lambda_h|_e \in \mathbb{P}_1(e) \quad \forall e \in \Gamma_h \right\},$$

y

$$\Phi_{\tilde{h}} := \left\{ \phi_{\tilde{h}} \in L^2(\Gamma) : \phi_{\tilde{h}}|_e \in \mathbb{P}_0(e) \quad \forall e \in \Gamma_{\tilde{h}} \right\},$$

donde Γ_h es la partición de Γ heredada de \mathcal{T}_h , y $\Gamma_{\tilde{h}}$ es otra partición de Γ , con $\tilde{h} := \max\{|e| : e \in \Gamma_{\tilde{h}}\}$. Además, sea $I_h : H^1(\Omega) \rightarrow X_h$ el interpolante de Clément, y recuerde que existen constantes positivas c_1, c_2 , independientes de h , tales que, para cada $v \in H^1(\Omega)$ y $e \in \mathcal{T}_h$ se tiene:

$$\|I_h(v)\|_{1,\Omega} \leq c_1 \|v\|_{1,\Omega} \quad \text{y} \quad \|v - I_h(v)\|_{0,e} \leq c_2 h_e^{1/2} |v|_{1,\omega_e},$$

donde $\omega_e := \cup\{K \in \mathcal{T}_h : K \cap e \neq \emptyset\}$.

- a) Defina un problema auxiliar conveniente con dato $\lambda_h \in \Lambda_h$, y aplique I_h para probar que existen constantes $C_1, C_2 > 0$, independientes de h y \tilde{h} , tales que, para cada $\phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}$ se tiene:

$$\sup_{v_h \in X_h \setminus 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, v_h \rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq C_1 \sup_{\lambda_h \in \Lambda_h \setminus 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, \lambda_h \rangle}{\|\lambda_h\|_{1/2,\Gamma}} - C_2 \left(\frac{h_\Gamma}{\tilde{h}} \right)^{1/2} \|\phi_{\tilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la paridad dual entre los espacios $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$, y $h_\Gamma := \max\{|e| : e \in \Gamma_h\}$.

- b) Defina un problema auxiliar conveniente con dato $\phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}$, y aplique la propiedad de aproximación dada por:

$$\|\lambda - \mathcal{P}_h^{1/2}(\lambda)\|_{1/2,\Gamma} \leq C h_\Gamma^{1/2} \|\lambda\|_{1,\Gamma} \quad \forall \lambda \in H^1(\Gamma),$$

donde $\mathcal{P}_h^{1/2} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \Lambda_h$ es el proyector ortogonal, para probar que existen $C_0, \beta > 0$, independientes de h_Γ y \tilde{h} , tales que, para cada $h_\Gamma \leq C_0 \tilde{h}$ se tiene:

$$\sup_{\lambda_h \in \Lambda_h \setminus 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, \lambda_h \rangle}{\|\lambda_h\|_{1/2,\Gamma}} \geq \beta \|\phi_{\tilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma} \quad \forall \phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}.$$

- c) Como una alternativa al análisis sugerido por a) y b), demuestre directamente, sin pasar por a), usando sólo el operador I_h , que existen constantes $C_3, C_4 > 0$, independientes de h y \tilde{h} , tales que, para cada $\phi_{\tilde{h}} \in \Phi_{\tilde{h}}$ se tiene:

$$\sup_{v_h \in X_h \setminus 0} \frac{\langle \phi_{\tilde{h}}, v_h \rangle}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq \left\{ C_3 - C_4 \left(\frac{h_\Gamma}{\tilde{h}} \right)^{1/2} \right\} \|\phi_{\tilde{h}}\|_{-1/2,\Gamma}$$

3. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^2 con frontera Lipschitz continua Γ . Dados $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$, el PROBLEMA DE ELASTICIDAD con condiciones de contorno de tracción (Neumann) consiste en hallar un tensor simétrico $\boldsymbol{\sigma}$ (esfuerzos) y un vector \mathbf{u} (desplazamientos), tales que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} \mathbf{e}(\mathbf{u}), \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{g} \quad \text{en } \Gamma. \quad (3)$$

Aquí, \mathcal{C} es el operador de elasticidad dado por la ley de Hooke (con constantes de Lamé $\lambda, \mu > 0$), $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top)$ es el tensor de pequeñas deformaciones, $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal a Γ , y los datos satisfacen la condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\chi} + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\chi} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{RM}(\Omega), \quad (4)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la paridad dual de $[H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$ con respecto al producto escalar de $[L^2(\Gamma)]^2$, y $\mathbb{RM}(\Omega) := [\mathbb{P}_0(\Omega)]^2 \oplus \mathbb{P}_0(\Omega) \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ es el espacio de movimientos rígidos en Ω . Puede probarse que (4) constituye una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución de (3).

- a) Demuestre que, en primera instancia, la formulación variacional mixta de (3) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{u}}) := (\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma})) \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times \mathbf{Q}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{u}}) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}; \Omega), \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{v}}) &= - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle \quad \forall \vec{\mathbf{v}} := (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (5)$$

donde $\mathbf{Q} := [L^2(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2 \times [L^2(\Omega)]_{\text{asym}}^{2 \times 2}$, y

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{v}}) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) + \langle \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{v}}) \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times \mathbf{Q}.$$

- b) Pruebe que el espacio de soluciones del problema homogéneo asociado a (5) está dado por $\left\{ (\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \vec{\mathbf{u}} = (\boldsymbol{\chi}, -\boldsymbol{\chi}|_{\Gamma}, \nabla \boldsymbol{\chi}), \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{RM}(\Omega) \right\}$.

- c) Agregue a (5) la condición de unicidad $\int_{\Omega} \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathbb{RM}(\Omega)$, y pruebe que la formulación variacional resultante es equivalente a: Hallar $((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}), \vec{\mathbf{u}}) := ((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}), (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma})) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\chi} + \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \vec{\mathbf{u}}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathbf{H}, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\mathbf{v}}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} &= - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle \quad \forall \vec{\mathbf{v}} := (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\mathbf{H} := H(\operatorname{div}; \Omega) \times \mathbb{RM}(\Omega)$.

- d) Use la teoría de Babuška-Brezzi para probar que (6) está bien propuesto.

4. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^2 con frontera Γ Lipschitz continua, y considere datos $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El PROBLEMA DE STOKES con condiciones de contorno de Neumann consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^\top$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω , tal que

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{en } \Omega, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} &= \mathbf{g} & \text{en } \Gamma, \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido y \mathbf{n} es el vector normal a Γ .

- a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\boldsymbol{\varphi} := -\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu \nabla \mathbf{u} - p \mathbf{I}$ en Ω , donde \mathbf{I} es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, y pruebe que, eliminando p , se obtiene, en primera instancia, la siguiente formulación variacional mixta: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in H, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) &= - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi} \rangle \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in Q, \end{aligned} \tag{8}$$

donde $H := \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\Gamma)]^2$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la paridad dual entre $[H^{-1/2}(\Gamma)]^2$ y $[H^{1/2}(\Gamma)]^2$, y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ son las formas bilineales acotadas definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\tau}^d \quad \text{y} \quad b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} + \langle \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \boldsymbol{\psi} \rangle.$$

- b) Asuma condiciones de compatibilidad adecuadas sobre \mathbf{f} y \mathbf{g} , identifique el espacio de soluciones del problema homogéneo asociado a (8), y luego aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que una versión convenientemente modificada de (8) está bien propuesta.
- c) Use la teoría de Babuška-Brezzi discreta para definir, explícitamente, un esquema de Galerkin estable para la formulación resultante de b).

CADA PROBLEMA VALE 20 PUNTOS. ELIJA SOLO 3 DE ELLOS.

GNG/gng