UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Análisis Funcional I (4220014)

Lunes 15 de Junio de 2015 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Dados $k \in \mathbb{N}$ y $a,\, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, denote por $P_k([a,b])$ al espacio de polinomios de grado $\leq k$ definidos sobre $[a,b]$. Equivalentemente, $p \in P_k([a,b])$ si y sólo si existen $\alpha_0,\, \alpha_1, \ldots,\, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que $p(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, x^j \quad \forall\, x \in [a,b]$.
   Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $p_n \in P_n([a,b])$ y $\delta_n > 0$, tales que
   $$\inf_{q \in P_{n-1}([a,b])} \int_a^b p_n(x) \Big\{ x^n + q(x) \Big\}\, dx \;\geq\; \delta_n \,.$$

2. Sean X e Y espacios de Banach, y sea $\mathcal{J} : Y' \times X' \to X' \times Y'$ la aplicación definida por $\mathcal{J}(G,F) = (-F,G) \;\; \forall\, (G,F) \in Y' \times X'$. A su vez, sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador lineal cerrado con $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, tal que $\mathcal{J}(\mathcal{G}(A')) + N(A)^o \times N(A')$ es un subespacio cerrado de $X' \times Y'$. Demuestre que A es acotado.

3. Dado un abierto acotado y simplemente conexo Ω de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, considere los espacios de Hilbert
   $$L^2(\Omega) \;:=\; \Big\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \quad v \text{ medible}\,, \quad \int_\Omega v^2 < +\infty \Big\}$$
   y
   $$H(\mathrm{rot};\Omega) \;:=\; \Big\{ \boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\tau} := \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \Big\}\,,$$
   provistos, respectivamente, de los productos interiores
   $$\langle v, w \rangle_{0,\Omega} \;:=\; \int_\Omega v\, w \quad \text{y} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathrm{rot},\Omega} \;:=\; \int_\Omega \Big\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\tau} \Big\}\,,$$
   con normas inducidas $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ y $\|\cdot\|_{\mathrm{rot},\Omega}$. Demuestre que existe $\delta \in (0,1)$ tal que para cada $v \in L^2(\Omega)$, existe $\boldsymbol{\zeta}_v \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ con $\|\boldsymbol{\zeta}_v\|_{\mathrm{rot},\Omega} < \delta^{-1}$ tal que $v = \|v\|_{0,\Omega}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\zeta}_v$.

4. Sean $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A : H \to H$ un operador lineal tal que $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle \qquad \forall\, x,\, y \in H$. Pruebe que A es acotado.

5. Sean H, Q espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(H, Q)$ tal que $N(T) = \{0\}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Existe $S \in \mathcal{L}(Q, H)$ tal que $ST = I : H \to H$.

   b) $R(T)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en Y.

   c) Confirme o desmienta si en el caso en que ambos espacios son Hilbert, dicho suplemento topológico está dado por $R(T)^{\perp}$.

6. Sean E y F espacios de Banach, y sea $T : E \to F$ un operador lineal cerrado con dominio $D(T)$ e imagen $R(T)$. Demuestre que son equivalentes:

   a) El operador T es inyectivo, y T^{-1} es acotado sobre $R(T)$.

   b) Existe una constante positiva C tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in D(T)$.

   c) $R(T)$ es cerrado en F, y T es inyectivo.

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PUNTOS. ELIJA 4 DE ELLOS

GGP/ggp