UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Análisis Funcional I (4220014)

Lunes 2 de Junio de 2014 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Invente y resuelva un problema no trivial.

2. Dado un abierto acotado y simplemente conexo Ω de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave Γ, considere los espacios de Hilbert

$$L^2(\Omega) := \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} : \quad v \text{ medible}, \quad \int_\Omega v^2 < +\infty \right\}$$

y

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^n : \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega) \right\},$$

provistos, respectivamente, de los productos interiores

$$\langle v, w\rangle_{0,\Omega} := \int_\Omega v\, w \quad \text{y} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathrm{div},\Omega} := \int_\Omega \left\{ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} \right\},$$

con normas inducidas $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ y $\|\cdot\|_{\mathrm{div},\Omega}$. Demuestre que para cada $N \in \mathbb{N}$ y para cada conjunto $\left\{ \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \ldots, \boldsymbol{\tau}_N \right\} \subseteq H(\mathrm{div};\Omega)$ se tiene que

$$A_N := \bigcap_{n=1}^{N} \left\{ \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} : \quad \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega), \quad \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_n\|_{\mathrm{div},\Omega} < n \right\} \quad \text{es abierto en } L^2(\Omega).$$

3. Dados $k \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, denote por $P_k([a,b])$ al espacio de polinomios de grado $\leq k$ definidos sobre $[a,b]$. Equivalentemente, $p \in P_k([a,b])$ si y sólo si existen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que $p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, x^j \quad \forall\, x \in [a,b]$.
Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $p_n \in P_n([a,b])$ y $\delta_n > 0$, tales que

$$\inf_{q \in P_{n-1}([a,b])} \int_a^b p_n(x) \left\{ x^n + q(x) \right\} dx \;\geq\; \delta_n\,.$$

4. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ con normas inducidas $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_Q$, respectivamente, y sea $A : \mathcal{D}(A) = H \to Q$ un operador lineal. Suponga que para cada $q \in Q$ existe $c_q > 0$ tal que

$$|\langle q, A(\boldsymbol{\tau})\rangle_Q| \;\leq\; c_q\, \|\boldsymbol{\tau}\|_H \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$

Pruebe de dos maneras distintas que A es acotado.

5. Sean S_1 y S_2 subespacios cerrados de un Banach X. Suponga primero que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que

$$\mathrm{dist}(x_n, S_1 \cap S_2) \,=\, 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \Big\{ \mathrm{dist}(x_n, S_1) \,+\, \mathrm{dist}(x_n, S_2) \Big\} \,=\, 0\,,$$

y concluya que $S_1 + S_2$ es un subespacio propio de $\overline{S_1 + S_2}$. Suponga luego que existen un subespacio S denso en X y una constante $c > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}(x, S_1 \cap S_2) \,\le\, c \Big\{ \mathrm{dist}(x, S_1) \,+\, \mathrm{dist}(x, S_2) \Big\} \qquad \forall\, x \in S\,,$$

y demuestre en tal caso que $S_1 + S_2$ es cerrado.

6. Sean A y B subespacios cerrados de un Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sobre $\mathbb{R}$.

   6.1) Pruebe que $\mathrm{dist}(x, A^\perp) \,=\, \sup\limits_{\substack{a\in A\\ \|a\|\le 1}} |\langle a, x\rangle| \qquad \forall\, x \in H.$

   6.2) Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
      a) $A \,+\, B$ es cerrado en H.
      b) $A^\perp \,+\, B^\perp \,=\, (A \cap B)^\perp$.
      c) $A^\perp \,+\, B^\perp$ es cerrado en H.
      d) $A \,+\, B \,=\, (A^\perp \cap B^\perp)^\perp$.

7. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to Q$ un operador lineal tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en H. Entonces se introduce el OPERADOR ADJUNTO de A como $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subseteq Q \to H$, donde

$$\mathcal{D}(A^*) \,:=\, \Big\{ q \in Q : \quad \exists\, \boldsymbol{\tau}^* \in H \text{ tal que } \quad \langle A(\boldsymbol{\tau}), q\rangle_Q = \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^*\rangle_H \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}(A) \Big\}\,,$$

y en tal caso se define $A^*(q) \,=\, \boldsymbol{\tau}^* \quad \forall\, q \in \mathcal{D}(A^*)$.

   a) Demuestre que A^* está bien definido y es un operador cerrado, y luego deduzca el concepto de autoadjunto cuando $H = Q$.

   b) Suponga en particular que $Q \,=\, Q_1 \times Q_2$, donde $(Q_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(Q_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ son también espacios de Hilbert reales, y que

$$A(\boldsymbol{\tau}) = (A_1(\boldsymbol{\tau}), A_2(\boldsymbol{\tau})) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{D}(A)\,,$$

   donde $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq H \to Q_1$ y $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \subseteq H \to Q_2$ son operadores lineales con $\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A_2) = \mathcal{D}(A)$ denso en H. Describa los dominios $\mathcal{D}(A_1^*)$, $\mathcal{D}(A_2^*)$, y $\mathcal{D}(A^*)$ sólo en términos de A_1 y A_2, y demuestre que

$$A^*(q) \,=\, A_1^*(q_1) \,+\, A_2^*(q_2) \qquad \forall\, q \,:=\, (q_1, q_2) \in \mathcal{D}(A_1^*) \times \mathcal{D}(A_2^*)\,.$$

   Qué relación (si es que) existe entre $\mathcal{D}(A^*)$ y $\mathcal{D}(A_1^*) \times \mathcal{D}(A_2^*)$? Deduzca finalmente que si A es cerrado y sobreyectivo entonces existe $c > 0$ tal que

$$\|A_1^*(q_1) \,+\, A_2^*(q_2)\|_H \,\ge\, c\, \|q\|_Q \qquad \forall\, q \,:=\, (q_1, q_2) \in \mathcal{D}(A_1^*) \times \mathcal{D}(A_2^*)\,.$$

CADA PROBLEMA VALE 1 PUNTO. ELIJA 6 DE ELLOS.

GGP/ggp