UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Análisis Funcional I (4220014)

Viernes 7 de Junio de 2013 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean X e Y espacios de Banach reales y sea $\mathcal{A} : X \times Y \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, esto es, $\mathcal{A}$ satisface:

   i) $\mathcal{A}(\alpha\, x + \beta\, z, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x,y) + \beta\, \mathcal{A}(z,y) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x,\, z \in X\,,\ \forall\, y \in Y,$

   ii) $\mathcal{A}(x, \alpha\, y + \beta\, z) = \alpha\, \mathcal{A}(x,y) + \beta\, \mathcal{A}(x,z) \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in X\,,\ \forall\, y,\, z \in Y.$

   Asuma adicionalmente que $\mathcal{A}$ es acotada y coerciva, es decir:

   iii) existe $M > 0$ tal que $\quad |\mathcal{A}(x,y)| \,\le\, M\, \|x\|\, \|y\| \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y,$

   iv) existe $\alpha > 0$ tal que $\quad \displaystyle\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{A}(x,y)}{\|x\|} \,\ge\, \alpha\, \|y\| \quad \forall\, y \in Y,$

   v) $\displaystyle\sup_{y \in Y} \mathcal{A}(x,y) > 0 \qquad \forall\, x \in X,\ x \neq \mathbf{0},$

   y defina los operadores lineales $\mathbf{A} : X \to Y'$ y $\mathbf{B} : Y \to X'$ como

   $$\mathbf{A}(x)(y) \,:=\, \mathcal{A}(x,y) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(y)(x) \,:=\, \mathcal{A}(x,y) \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y\,.$$

   a) Demuestre que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ están bien definidos y son acotados.
   b) Pruebe que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son inyectivos y que $R(\mathbf{B})$ es cerrado en X'.
   c) Defina explícitamente los operadores $\mathbf{A}' : Y'' \to X'$ y $\mathbf{B}' : X'' \to Y'$, y deduzca que $\mathbf{B}'$ es sobreyectivo.
   d) Suponga en particular que X e Y son espacios de Hilbert y demuestre en tal caso que $\mathcal{R}_X \circ \mathbf{B} \,=\, (\mathcal{R}_Y \circ \mathbf{A})^*$, donde $\mathcal{R}_X$ y $\mathcal{R}_Y$ son las aplicaciones de Riesz respectivas. Concluya a partir de esta identidad y iv) que $\mathbf{A}$ es biyectivo. [1.5 PUNTOS]

2. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $\bar{B}(\mathbf{0},1) \,:=\, \Big\{ x \in X : \quad \|x\| \le 1 \Big\}$ su bola unitaria cerrada. A su vez, dados $N \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^N)$, y $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^N$, se define el funcional $(\boldsymbol{\beta} \cdot A) : X \to \mathbb{R}$ por $(\boldsymbol{\beta} \cdot A)(x) \,:=\, \langle \boldsymbol{\beta}, A(x) \rangle_N \quad \forall\, x \in X$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^N$. Demuestre que un vector $\boldsymbol{\alpha}$ de $\mathbb{R}^N$ pertenece a $\overline{A(\bar{B}(\mathbf{0},1))}$ si y sólo si $\,|\, \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle_N \,| \,\le\, \|\boldsymbol{\beta} \cdot A\|_{X'} \quad \forall\, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^N.$

   [1.5 PUNTOS]

3. Sean X e Y espacios de Banach para los cuales existe una biyección $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, y sea Z un subespacio de X. Pruebe que todo $g \in Z'$ puede "*extenderse*" a un $G \in Y'$ tal que $\|G\|_{Y'} \cong \|g\|_{Z'}$. [0.5 PUNTOS]

4. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{T}$ un conjunto finito de triángulos T, cuyos interiores son disjuntos entre sí, tal que $\bar{\Omega} = \cup\{T : \quad T \in \mathcal{T}\}$. Defina
$$H^1_{\mathcal{T}}(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_T \in H^1(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T} \Big\}, \quad \text{y}$$
$$S_{\mathcal{T}} := \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad u|_T \quad \text{es constante} \quad \forall\, T \in \mathcal{T} \Big\}.$$
Entonces, dado $u \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$, encuentre su mejor aproximación por elementos de $S^{\perp}_{\mathcal{T}}$ con respecto al producto escalar
$$\langle v, w \rangle := \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \Big\{ v\, w + \nabla v \cdot \nabla w \Big\} \qquad \forall\, v,\, w \,\in\, H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)\,.$$
Qué sucede con dicha mejor aproximación si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se reemplaza por
$$\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle := \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T v\, w \qquad \forall\, v,\, w \,\in\, H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)\,?$$
[1.0 PUNTO]

5. Con la misma notación del ejercicio anterior, defina $A : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ por
$$A(u) := \left(\int_T \Big\{ u(x) \,+\, x \cdot \nabla u(x) \Big\}\, dx \right)_{T \in \mathcal{T}} \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega)\,,$$
donde N es la cardinalidad de $\mathcal{T}$, y los espacios $H^1(\Omega)$ y $\mathbb{R}^N$ se proveen de sus productos escalares usuales. Demuestre que $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), \mathbb{R}^N)$ y defina explícitamente el operador $A^* : \mathbb{R}^N \to H^1(\Omega)$. [1.0 PUNTO]

6. Determine, **justificadamente**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas o no necesariamente ciertas (a menos que se tenga una hipótesis extra):

   i) La suma de un operador acotado con uno cerrado es un operador cerrado.
   ii) Si X e Y son espacios vectoriales normados y $A : \mathcal{L}(X,Y) \to Y'$ es un operador lineal, cerrado y biyectivo, entonces A^{-1} es acotado.
   iii) Si X e Y son espacios de Banach y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ es un operador lineal cerrado e inyectivo tal que $A^{-1} : \mathcal{D}(A^{-1}) \subseteq Y \to X$ no es acotado, entonces $R(A)$ es un subespacio cerrado propio de Y.
   iv) El teorema de representación de Riesz es suficiente para concluir el teorema de Hahn-Banach en espacios de Hilbert.
   v) El teorema del grafo cerrado no puede ser demostrado con el teorema de la aplicación abierta.

[1.0 PUNTO]

ELIJA CUALQUIER COMBINACIÓN DE PROBLEMAS QUE SUMEN ≤ 5.5 PUNTOS

GGP/ggp