UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Análisis Funcional (4220014)

Jueves 31 de Mayo de 2012 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean X un Hilbert sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $F : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal tal que su espacio nulo $N(F) := \Big\{ x \in X : \quad F(x) = 0 \Big\}$ no es denso en X. Pruebe que $F \in X'$ y concluya así que $N(F)$ es un subespacio cerrado propio de X.

2. Sean X un espacio vectorial normado y $\Big\{ F, F_1, F_2, \cdots, F_N \Big\}$ funcionales lineales sobre X tales que $\bigcap\limits_{1=1}^{N} N(F_i) \subseteq N(F)$. Aplique la segunda forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach para probar que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ tales que $F = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \, F_i$. Explique cómo se simplifica la demostración anterior, sin usar ninguna versión del Teorema de Hahn-Banach sino sólo argumentos de ortogonalidad, en el caso particular en que X es un Hilbert y ninguno de los espacios nulos de los funcionales involucrados es denso en X.

3. Dados X, Y y Z espacios de Banach, considere operadores $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ y $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \to Z$ lineales tales que $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$, A es cerrado y B admite una clausura. Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|B(x)\| \,\leq\, C \Big\{ \|A(x)\| \,+\, \|x\| \Big\} \qquad \forall \, x \in \mathcal{D}(A) \, .$$

4. Sean $\Omega \;:=]-\pi, \pi[$ y $(H^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega})$ el espacio de Sobolev de orden 1. A su vez, sea $n \in \mathbb{N}$ y considere los conjuntos de funciones $\{p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ y $\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ definidos por $p_k(t) := \operatorname{sen}(kt)$ y $q_k(t) := \cos(kt) \quad \forall \, t \in [-\pi, \pi], \quad \forall \, k \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Entonces, dado $\mathbf{z} := (z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^{n+1}$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tal que $\langle u_1, p_k \rangle_{1,\Omega} + \langle u_2, q_k \rangle_{1,\Omega} = z_k \quad \forall \, k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, y de modo que

$$\int_\Omega (u_1'(t))^2 \, dt \,+\, \int_\Omega (u_2'(t))^2 \, dt$$

$$= \min_{\substack{\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \\ \langle v_1, p_k \rangle_{1,\Omega} + \langle v_2, q_k \rangle_{1,\Omega} \;= z_k \; \forall \, k}} \left\{ \int_\Omega (v_1'(t))^2 \, dt \,+\, \int_\Omega (v_2'(t))^2 \, dt \right\}$$

5. Sean X e Y espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ un operador lineal cerrado con $\mathcal{D}(A)$ denso en X. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) A' es sobreyectivo, es decir $R(A') = X'$.
   b) Existe $c \geq 0$ tal que $\quad \|x\| \leq c\,\|A(x)\| \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A)$.
   c) $N(A) = \{\theta_X\}$ y $R(A)$ es cerrado.

6. El presente ejercicio apunta a caracterizar la sobreyectividad de un operador cuyo rango está contenido en un espacio producto, en términos de la sobreyectividad de sus respectivas componentes.

   a) Recuerde primero que, dados $m,\, n \in \mathbb{N}$ y un operador lineal $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, el Teorema de las Dimensiones establece que $n = \dim N(\mathcal{B}) + \dim R(\mathcal{B})$. Luego, suponga que $m = m_1 + m_2$ y que $\mathcal{B}(x) = (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, donde $\mathcal{B}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ es lineal para cada $i \in \{1, 2\}$, y demuestre que $\mathcal{B}$ es sobreyectivo si y sólo si

      i) $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son sobreyectivos. ii) $\mathbb{R}^n = N(\mathcal{B}_1) + N(\mathcal{B}_2)$.

   b) Sean U y V subespacios cerrados de un Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

      i) $U^\perp \subseteq U + V$. ii) $X = U + V$. iii) $U^\perp + V^\perp \subseteq U + V$.

   c) Sean X, Y_1 e Y_2 espacios de Hilbert arbitrarios y defina $Y := Y_1 \times Y_2$. Luego, sea $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\mathcal{B}(x) = (\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x)) \quad \forall\, x \in X$, donde $\mathcal{B}_i \in \mathcal{L}(X, Y_i) \quad \forall\, i \in \{1, 2\}$, y demuestre que $\mathcal{B}$ es sobreyectivo si y sólo si

      i) $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son sobreyectivos. ii) $X = N(\mathcal{B}_1) + N(\mathcal{B}_2)$.

7. Sea X un espacio vectorial normado. Un subespacio W de X' se dice SATURADO si para todo $F \in X' - W$ existe $x \in {}^oW$ tal que $F(x) \neq 0$. Equivalentemente, un subespacio W de X' es saturado sí y sólo sí $W = ({}^oW)^o$. El objetivo de este ejercicio es probar que un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si todo subespacio cerrado de X' es saturado. Para la primera implicación recuerde un resultado dado en clases, y para la segunda proceda como sigue:

   i) Considere $\mathcal{F} \in X''$, $\mathcal{F} \neq \mathbf{0}$, defina $W := \Big\{F \in X' : \quad \mathcal{F}(F) = 0\Big\}$, y pruebe que existen $G \in X' - W$ y $x_1 \in {}^oW$ tal que $G(x_1) \neq 0$.

   ii) Demuestre que $X' = W \oplus \langle\{G\}\rangle$, defina $\mathcal{H} \in X''$ por

   $$\mathcal{H}(F) := G(x_1)\,\mathcal{F}(F) - \mathcal{F}(G)\,F(x_1) \qquad \forall\, F \in X',$$

   y utilice la descomposición de X' para concluir que $\mathcal{H}$ es el funcional nulo.

   iii) Deduzca a partir de ii) que $\mathcal{F} = J(\beta\, x_1)$, con $\beta := \frac{\mathcal{F}(G)}{G(x_1)}$.

CADA PROBLEMA VALE 20 PUNTOS. ELIJA 5 DE ELLOS.

GGP/ggp