UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Tópicos de Elementos Finitos II (408.xxx)

Jueves 12 de Octubre de 2000 *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (20 Puntos). (Lema de Fortin) Sean X, M espacios de Hilbert, y sea $B : X \times M \to \mathbf{R}$ una forma bilineal que satisface la condición inf-sup continua. Considere una familia $\{X_h \times M_h\}_{h>0}$ de subespacios de $X \times M$, y suponga que existen operadores lineales y uniformemente acotados $P_h : X \to X_h$, tales que

$$B(\tau - P_h(\tau), v_h) = 0 \qquad \forall\, \tau \in X\,, \quad \forall\, v_h \in M_h\,.$$

Demuestre que B satisface la condición inf-sup discreta en $X_h \times M_h$, es decir, existe $\beta^* > 0$, independiente de h, tal que

$$\sup_{\substack{\tau_h \in X_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{B(\tau_h, v_h)}{||\tau_h||_X} \,\geq\, \beta^* \, ||v_h||_M \quad \forall\, v_h \in M_h\,.$$

Problema 2 (20 Puntos). (Lemas de Strang) Dados un espacio de Hilbert H, una forma bilineal acotada $A : H \times H \to \mathbf{R}$ y $F \in H'$, considere el problema variacional: Hallar $u \in H$ tal que $A(u,v) = F(v)$ para todo $v \in H$. Además, sea H_h un subespacio de dimensión finita de H, $A_h : H_h \times H_h \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada, F_h un funcional de H_h', y defina el esquema de Galerkin asociado: Hallar $u_h \in H_h$ tal que $A_h(u_h, v_h) = F_h(v_h)$ para todo $v_h \in H_h$.

a) Suponga que las formas bilineales A_h son uniformemente H_h-elípticas, y demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C \left\{ \inf_{v_h \in H_h} \left(||u - v_h||_H + \sup_{\substack{w_h \in H_h \\ w_h \neq 0}} \frac{|\, A(v_h, w_h) - A_h(v_h, w_h)\,|}{||w_h||_H} \right) \right.$$
$$\left. + \sup_{\substack{w_h \in H_h \\ w_h \neq 0}} \left(\frac{F(w_h) - F_h(w_h)}{||w_h||_H} \right) \right\}.$$

b) Extienda la estimación anterior al caso en que H_h **no es** necesariamente un subespacio de H. Para tal efecto, considere una norma $||\cdot||_h$ definida sobre $H \cup H_h$ y asuma que las formas bilineales A_h son uniformemente elípticas y acotadas sobre H_h y $(H \cup H_h) \times H_h$, respectivamente, con respecto a la norma $||\cdot||_h$.

Problema 3 (60 Puntos). Sea Ω un abierto acotado y simplemente conexo de $\mathbf{R}^2$ con frontera Lipschitz continua Γ. Dados $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, una función $\boldsymbol{\kappa} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, y una constante $\lambda > 0$, considere el problema de valores de contorno no-lineal: *Hallar u tal que*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\kappa}(|\nabla u|)\,\nabla u) + \lambda\, u &= f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ u &= g \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \end{aligned} \tag{P}$$

a) Introduzca variables adicionales apropiadas y demuestre que una formulación variacional mixta de (P) se reduce a: *Hallar* $((\mathbf{t}, u), \boldsymbol{\sigma}) \in X \times M$ *tal que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}' \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{t}, u) \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}, \tag{Q}$$

donde $X := [L^2(\Omega)]^2 \times L^2(\Omega)$, $M := H(\operatorname{div};\Omega)$, $\mathbf{F} \in X'$ y $\mathbf{G} \in M'$ son funcionales que dependen de f y g, respectivamente, $\mathbf{O}$ es el operador nulo, y los operadores $\mathbf{A} : X \to X'$, $\mathbf{B} : X \to M'$ están definidos por

$$[\mathbf{A}(\mathbf{r}, w), (\mathbf{s}, v)] := \int_\Omega \boldsymbol{\kappa}(|\mathbf{r}|)\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}\, dx \, + \, \lambda \int_\Omega wv\, dx$$

y

$$[\mathbf{B}(\mathbf{s}, v), \boldsymbol{\tau}] := -\int_\Omega \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx - \int_\Omega v \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\, dx\,,$$

para todo $(\mathbf{r}, w)$, $(\mathbf{s}, v) \in X$, para todo $\boldsymbol{\tau} \in M$.

b) Suponga que $\boldsymbol{\kappa} \in C^1(\mathbf{R}^+)$, que existen constantes κ_0, $\kappa_1 > 0$ tales que para todo $\mu \in \mathbf{R}^+$:

$$\kappa_0 \le \boldsymbol{\kappa}(\mu) \le \kappa_1 \quad \text{y} \quad \kappa_0 \le \boldsymbol{\kappa}(\mu) + \mu\, \boldsymbol{\kappa}'(\mu) \le \kappa_1\,,$$

y demuestre que el problema (Q) tiene una única solución $((\mathbf{t}, u), \boldsymbol{\sigma}) \in X \times M$, la cual satisface

$$||((\mathbf{t}, u), \boldsymbol{\sigma})||_{X \times M} \, \le \, C \,\{\, ||f||_{L^2(\Omega)} \, + \, ||g||_{H^{1/2}(\Gamma)} \,\}\,,$$

con una constante $C > 0$, independiente de dicha solución.

c) Utilice el método basado en la solución de problemas locales para desarrollar un análisis de error a-posteriori para (Q). En particular, considere funciones seccionalmente constantes para aproximar a $\mathbf{t}$ y u, el espacio de Raviart-Thomas de orden 0 para aproximar a $\boldsymbol{\sigma}$, y deduzca un estimador de error a-posteriori **explícito**, similar al obtenido en clases para el caso $\lambda = 0$.