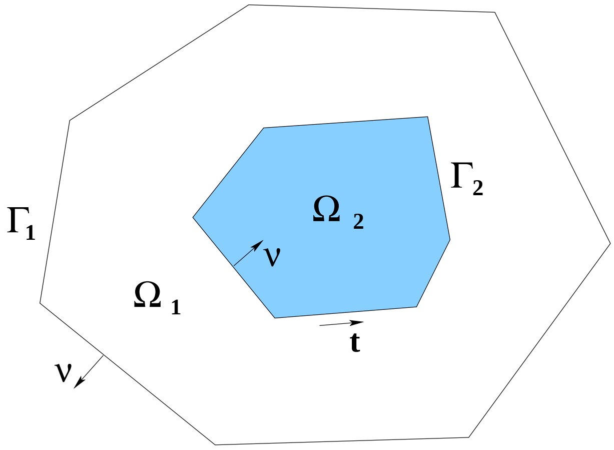
UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Tópicos de Elementos Finitos I (408635).

Julio 13, 2005 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Acoplamiento Stokes-Darcy. Sea Ω_2 un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ_2, y sea Ω_1 la region anular acotada por Γ_2 y por una curva cerrada Γ_1 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_2$, como se muestra en la siguiente figura:



El propósito de este ejercicio es analizar el acoplamiento de un fluido viscoso que ocupa la region Ω_1 con un material poroso que vive en Ω_2. Si $\mu > 0$ es la viscosidad y $\mathbf{K}$ es una matriz simétrica y uniformemente definida positiva que representa la permeabilidad del medio poroso, entonces las ecuaciones constitutivas están dadas por las leyes de Stokes y de Darcy, respectivamente, esto es:

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) \,=\, -\,p_1\,\mathbf{I} \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \quad \text{en} \quad \Omega_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 \,=\, -\,\mathbf{K}\,\nabla\,p_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,,$$

donde $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y (p_1, p_2) denotan las velocidades y presiones en los dominios correspondientes, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)$ es el tensor de esfuerzos y $\mathbf{e}(\mathbf{u}_1) := \frac{1}{2}\Big(\nabla\mathbf{u}_1 + (\nabla\mathbf{u}_1)^{\mathtt{t}}\Big)$ es el tensor de deformaciones. Así, dados $\mathbf{f}_1 \in [L^2(\Omega_1)]^2$ y $f_2 \in L^2(\Omega_2)$ tal que $\int_{\Omega_2} f_2 = 0$, nos interesa: Hallar $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ y $p := (p_1, p_2)$ tales que

$$\left\{\begin{array}{rcllll}
-\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1) & = & \mathbf{f}_1 & \text{en} & \Omega_1 & \text{(conservación de momentum)}\,,\\
\mathrm{div}\,\mathbf{u}_1 & = & 0 & \text{en} & \Omega_1 & \text{(conservación de masa)}\,,\\
\mathbf{u}_1 & = & 0 & \text{en} & \Gamma_1 & \text{(deslizamiento nulo)}\,,\\
\mathrm{div}\,\mathbf{u}_2 & = & f_2 & \text{en} & \Omega_2 & \text{(conservación de masa)}\,,\\
\mathbf{u}_1\cdot\boldsymbol{\nu} & = & \mathbf{u}_2\cdot\boldsymbol{\nu} & \text{en} & \Gamma_2 & \text{(conservación de masa)}\,,\\
(\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\boldsymbol{\nu}\,)\cdot\boldsymbol{\nu} & = & -\,p_2 & \text{en} & \Gamma_2 & \text{(balance de fuerzas normales)}\,,\\
-\,\dfrac{\kappa}{\mu}\,(\,\boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1, p_1)\,\boldsymbol{\nu})\cdot\mathbf{t} & = & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t} & \text{en} & \Gamma_2 & \text{(ley de Beavers-Joseph-Saffman)}\,,
\end{array}\right.$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal unitario exterior a Ω_1, $\mathbf{t}$ es el vector tangencial a Γ_2, $\kappa > 0$ es la constante de fricción, y la ley de Beavers-Joseph-Saffman establece que el esfuerzo de corte es proporcional a la velocidad de deslizamiento (bajo el supuesto experimental que $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{t}$ es despreciable).

a) Pruebe que dados $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ campos vectoriales suficientemente suaves en un dominio Ω de $\mathbb{R}^2$, se tiene la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\mathbf{e}(\mathbf{w}) = -\int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{w}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega} \Big\{ (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu})\,(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{w})\boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,(\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{w})\boldsymbol{\nu}) \Big\}.$$

b) Defina los espacios

$$\begin{aligned}
[H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)]^2 &:= \{\, \mathbf{v}_1 \in [H^1(\Omega_1)]^2 : \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_1 \}\,,\\
H(\mathrm{div}\,;\Omega_2) &:= \{\, \mathbf{v}_2 \in [L^2(\Omega_2)]^2 : \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v}_2 \in L^2(\Omega_2)\,\}\,,\\
\mathbf{H} &:= [H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)]^2 \times H(\mathrm{div}\,;\Omega_2)\,,\\
\mathbf{Q} &:= (L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)) \times H^{1/2}(\Gamma_2)\,,
\end{aligned}$$

y demuestre que una formulación variacional mixta del presente problema de transmisión se reduce a: Hallar $(\mathbf{u}, (p,\lambda)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v},(p,\lambda)) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \quad \forall\, \mathbf{v} := (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \in \mathbf{H}\,,\\
\mathbf{b}(\mathbf{u},(q,\xi)) &= -\int_{\Omega_2} f_2\, q_2 \quad \forall\,(q,\xi) := ((q_1,q_2),\xi) \in \mathbf{Q}\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

donde $\mathbf{a} : \mathbf{H}\times\mathbf{H} \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} : \mathbf{H}\times\mathbf{Q} \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := 2\,\mu \int_{\Omega_1} \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_1) + \frac{\mu}{\kappa} \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{t})\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{t}) + \int_{\Omega_2} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}_2\,,$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{v},(q,\xi)) := -\int_{\Omega_1} q_1\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_1 - \int_{\Omega_2} q_2\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_2 + \int_{\Gamma_2} (\mathbf{v}_1\cdot\boldsymbol{\nu} + \mathbf{v}_2\cdot\boldsymbol{\nu})\,\xi\,.$$

c) Demuestre que si $(\mathbf{u},(p,\lambda)) \in \mathbf{H}\times\mathbf{Q}$ es una solución de (1), entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, $(\mathbf{u},(\tilde{p},\tilde{\lambda})) \in \mathbf{H}\times\mathbf{Q}$ también lo es, con $\tilde{p} := (p_1 + c, p_2 + c)$ y $\tilde{\lambda} := \lambda + c$. En tal caso, deduzca cómo debe modificarse la definición del espacio $\mathbf{Q}$ para evitar estas soluciones adicionales.

d) Defina el funcional de la energía complementaria y el operador Lagrangiano asociado a las ecuaciones de punto silla (1), e identifique los multiplicadores de Lagrange correspondientes.

e) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (1) (con el espacio $\mathbf{Q}$ modificado de acuerdo a c)) posee una única solución.

2. <u>Un Teorema Abstracto</u>. Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X,X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y,Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es

$$\langle \mathbf{S}(y), y\rangle_Y \;\geq\; 0 \quad \forall\, y \in Y\,,$$

y que existen constantes positivas α, β tales que

$$\langle \mathbf{P}x, x\rangle_X \;\geq\; \alpha\,||x||_X^2 \qquad \forall\, x \in X$$

y

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{Q}(x), y\rangle_Y}{||x||_X} \;\geq\; \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de $||\mathbf{P}||$, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que $||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \;\leq\; C\,\{\,||f|| + ||g||\,\}$.

3. <u>Elasticidad Incompresible</u>. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y sea $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. La formulación en desplazamiento del problema de elasticidad lineal para un material casi-incompresible[1] consiste en: Hallar $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ tal que

$$-2\,\mu\,\mathbf{div}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}) \;-\; \lambda\,\nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) \;=\; \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \qquad \mathbf{u} \;=\; \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{2}$$

donde $\lambda \;>>\; \mu > 0$ son las constantes de Lamé y $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(\nabla\,\mathbf{u} + (\nabla\,\mathbf{u})^{\mathtt{t}})$ es el tensor de deformaciones.

a) Defina la incógnita auxiliar $p \;:=\; \lambda\,\mathrm{div}\;\mathbf{u}$ en Ω y demuestre que una formulación variacional de (2) se reduce a: Hallar $(\mathbf{u}, p) \;\in\; [H_0^1(\Omega)]^2 \;\times\; L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} 2\,\mu \int_\Omega \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \;+\; \int_\Omega p\,\mathrm{div}\;\mathbf{v} \;&=\; \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall\,\mathbf{v} \;\in\; [H_0^1(\Omega)]^2\,, \\ \int_\Omega q\,\mathrm{div}\;\mathbf{u} \;-\; \frac{1}{\lambda}\int_\Omega pq \;&=\; 0 \qquad\qquad \forall\, q \;\in\; L_0^2(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

b) Aplique el teorema abstracto del problema anterior para probar que (3) tiene una única solución que depende continuamente del dato $\mathbf{f}$.

[1]Se dice que un material que ocupa la region Ω es **casi-incompresible** si se necesitan cantidades muy altas de energía para producir cambios pequeños en su densidad, lo cual genera una gran diferencia entre los tamaños de las constantes de Lamé.

4. <u>Un Problema de Neumann</u>. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ.

a) Considere el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y semi-norma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. Defina la aplicación

$$|||v||| := \left\{ |v|^2_{H^1(\Omega)} + \left(\int_\Omega v \right)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

y demuestre que existen C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1\, |||v||| \,\leq\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \,\leq\, C_2\, |||v||| \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

b) Considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \int_\Omega u \,=\, 0\,,$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ es tal que $\displaystyle\int_\Omega f \,=\, 0$, y demuestre que su formulación débil se reduce a: Hallar $(u,\lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,+\, \lambda \int_\Omega v \,=\, \int_\Omega f v \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

$$\mu \int_\Omega u \,=\, 0 \qquad \forall\, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que este problema tiene solución única, la cual depende continuamente de f.

c) Extienda el análisis en b) al caso discreto y deduzca espacios de elementos finitos que garanticen la solubilidad y estabilidad del esquema de Galerkin asociado. Indique la razón de convergencia correspondiente.

Referencias

[1] D. Braess: Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics. Cambridge University Press, 1997.

[2] G.N. Gatica, N. Heuer and S. Meddahi: *On the numerical analysis of nonlinear twofold saddle point problems.* IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 23, 2, pp. 301-330, (2003).

[3] W.J. Layton, F. Schieweck and I. Yotov: *Coupling fluid flow with porous media flow.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 40, 6, pp. 2195-2218, (2003).