UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Lunes, 14 de Noviembre de 2016 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (2 PUNTOS) Dados H un espacio de Hilbert, $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, $A : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y H-elíptica, $F \in H'$, y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funcionales tales que $F_n \in H_n'$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, considere los problemas: Hallar $u \in H$ y $u_n \in H_n$ tales que

$$A(u,v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in H \quad \text{y} \quad A(u_n,v) \,=\, F_n(v) \quad \forall\, v \in H_n\,.$$

   a) Pruebe que ambas formulaciones anteriores están bien propuestas, y deduzca que existe una constante $C > 0$, independiente de $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u - u_n\|_H \,\le\, C \left\{ \operatorname{dist}(u, H_n) \,+\, \big\| F|_{H_n} - F_n \big\|_{H_n'} \right\}.$$

   Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ y $\alpha \in \mathbb{R}$, considere el problema:

$$-\,\Delta u = \alpha\, f(u) \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \gamma_0(u) = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad (1)$$

   donde $f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ es una función no-lineal para la cual existe $L > 0$ tal que $|f(z)(x) - f(w)(x)| \,\le\, L\,|z(x) - w(x)| \quad \forall\, x \in \Omega\,,\ \forall\, z,\, w \in H_0^1(\Omega)$.

   b) Dado H_n un subespacio arbitrario de dimensión finita de $H := H_0^1(\Omega)$, establezca las formulaciones continua y de Galerkin asociadas a (1), y utilice el Lema de Lax-Milgram en conjunto con el Teorema del Punto Fijo de Banach para probar que, si α es suficientemente pequeño, dichos esquemas tienen únicas soluciones $u \in H$ y $u_n \in H_n$, respectivamente.

   c) Aplique convenientemente el resultado de a) para probar que, si α es suficientemente pequeño, entonces existe $C > 0$, independiente de n, tal que $\|u - u_n\|_H \,\le\, C\, \operatorname{dist}(u, H_n)$.

   IND.: para la parte continua de b) defina el operador $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ que a cada $u \in H_0^1(\Omega)$ le asigna la solución $\widetilde{u} := T(u) \in H_0^1(\Omega)$ del problema lineal: $-\,\Delta\widetilde{u} = \alpha\, f(u) \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \gamma_0(\widetilde{u}) = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma$.

2. (1 PUNTO)

   a) Cuantos polinomios de grado ≤ 2 que se anulan en la frontera del tetraedro unitario y en su baricentro $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ existen ?

   b) Cuantos polinomios de grado ≤ 2 que se anulan en la frontera del tetraedro unitario y que valen 1 en su baricentro $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ existen ?

   c) Encuentre el único polinomio p_K de grado ≤ 2 en cada variable que se anula en la frontera del hipercubo K de vértices $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(0,2,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(0,2,1)$, y $(0,1,1)$, y que vale 2 en el baricentro respectivo.

3. (3 PUNTOS) Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, con frontera Lipschitz-continua Γ, y sean Γ_D y Γ_N partes disjuntas de Γ tal que $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$.

   a) Sea $E_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ el operador definido por $E_D(\varphi) := \gamma_0(z_\varphi)$, donde $z_\varphi \in H^1(\Omega)$ es la única solución del problema

$$\Delta z_\varphi = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \gamma_0(z_\varphi) = \varphi \quad \text{en} \quad \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(z_\varphi) = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N\,, \tag{2}$$

   y sea $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ el operador de extensión nula en Γ_D. Pruebe que E_D está bien definido (es decir que (2) está bien propuesto), que $E_D \in \mathcal{L}\big(H^{1/2}(\Gamma_D), H^{1/2}(\Gamma)\big)$, y que

$$H^{1/2}(\Gamma) \;=\; E_D\big(H^{1/2}(\Gamma_D)\big) \;\oplus\; E_{N,0}\big(H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)\big)\,. \tag{3}$$

Dados $f \in L^2(\Omega)$, $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $g_N \in H^{-1/2}_{00}(\Gamma_N)$, considere el problema de valores de contorno

$$\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \gamma_0(u) = g_D \quad \text{en} \quad \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(u) = g_N \quad \text{en} \quad \Gamma_N\,. \tag{4}$$

   b) Pruebe que una formulación primal-mixta de (4) se reduce a: Hallar $(u,\xi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma_D)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,+\, \langle \xi, \gamma_0(v)|_{\Gamma_D}\rangle_{\Gamma_D} &= F(v) \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,\\ \langle \lambda, \gamma_0(u)|_{\Gamma_D}\rangle_{\Gamma_D} &= G(\lambda) \qquad \forall\, \lambda \in H^{-1/2}(\Gamma_D)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

   donde $\langle \cdot,\cdot\rangle_{\Gamma_D}$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $H^{1/2}(\Gamma_D)$, y F y G son funcionales lineales y acotados que dependen del par (f, g_N) y de g_D, respectivamente.

   c) Muestre que una formulación dual-mixta de (4) queda dada por: Hallar $(\sigma,(u,\varphi)) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times \big(L^2(\Omega) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)\big)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\cdot\tau \,+\, \int_\Omega u \,\mathrm{div}(\tau) \,+\, \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\tau)|_{\Gamma_N}, \varphi\rangle_{\Gamma_N} &= F(\tau)\,,\\ \int_\Omega v\,\mathrm{div}(\sigma) \,+\, \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\sigma)|_{\Gamma_N}, \psi\rangle_{\Gamma_N} &= G(v,\psi)\,, \end{aligned} \tag{6}$$

   para todo $(\tau,(v,\psi)) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times \big(L^2(\Omega) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)\big)$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Gamma_N}$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}_{00}(\Gamma_N)$ y $H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$, y F y G son funcionales lineales y acotados que dependen de g_D y del par (f, g_N), respectivamente.

   d) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que uno de los dos problemas ((5) o (6)) está bien propuesto.

GGP/ggp