UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Lunes, 16 de Noviembre de 2015 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (1 PUNTO). Sean K_1 y K_2 triángulos adyacentes de $\mathbb{R}^2$ con diámetros h_1 y h_2, respectivamente, denote $h := \max\{h_1, h_2\}$, y considere el operador lineal $\Pi : L^2(K_1 \cup K_2) \to P_0(K_1 \cup K_2)$ definido por

$$\Pi(v) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \left\{ \frac{1}{|K_j|} \int_{K_j} v \right\} \qquad \forall\, v \in L^2(K_1 \cup K_2)\,.$$

Demuestre que para cada $\delta \in [0,1]$ existe una constante $C_\delta > 0$, independiente de K_1 y K_2, tal que

$$\|v - \Pi(v)\|_{0,K_1\cup K_2} \,\leq\, C_\delta\, h^\delta\, \|v\|_{\delta,K_1\cup K_2} \qquad \forall\, v \in H^\delta(K_1 \cup K_2)\,.$$

2. (1 PUNTO) Encuentre el único polinomio b_K de grado ≤ 4 que se anula en la frontera del tetraedro K de vértices $(0,1,1)$, $(1,2,2)$, $(0,0,4)$ y $(0,0,0)$, y que vale 2 en el baricentro respectivo.

3. (1 PUNTO) Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{R}$ con $\kappa_2 \neq 0$, considere el problema:

$$-\,\Delta\, u \,+\, \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,+\, \kappa_2\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{1}$$

Defina la incógnita auxiliar $\sigma = \nabla u$ en Ω y deduzca la siguiente formulación variacional mixta de (1): Hallar $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in H(\text{div};\Omega)$ tal que

$$\kappa_2 \int_\Omega \sigma \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \text{div}\,\sigma\,\text{div}\,\boldsymbol{\tau} - \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \sigma_j\,\text{div}\,\boldsymbol{\tau} = -\int_\Omega f\,\text{div}\,\boldsymbol{\tau} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div};\Omega)\,.$$

Dibuje la region

$$S \,:=\, \left\{ (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2 : \;\; \kappa_2 > 0 \;\text{ y }\; |\kappa_1| \,<\, 2\,\min\left\{\kappa_2, \frac{1}{n}\right\} \right\},$$

y pruebe que para todo $(\kappa_1, \kappa_2) \in S$ el problema anterior tiene una única solución $\sigma \in H(\text{div};\Omega)$ que depende continuamente del dato f.

4. (3 PUNTOS) Sea Ω un abierto acotado, conexo, pero no necesariamente convexo, de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y considere el espacio de Hilbert $H(\mathrm{div};\Omega)$ de vectores en $[L^2(\Omega)]^n$ con divergencia en $L^2(\Omega)$, cuya norma inducida se denota por $\|\cdot\|_{\mathrm{div};\Omega}$. Se dice que $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ admite una DESCOMPOSICIÓN DE HELMHOLTZ ESTABLE si existen $z \in H^2(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$ con $\int_\Omega \varphi = 0$ cuando $n = 2$ (resp. $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$ con $\int_\Omega \varphi = \mathbf{0}$ cuando $n = 3$), y una constante $C > 0$, independiente de las variables anteriores, tales que

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla z + \mathbf{curl}\,\varphi \quad \text{en} \quad \Omega \qquad \text{y} \qquad \|\nabla z\|_{1,\Omega} + \|\varphi\|_{1,\Omega} \leq C\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathrm{div};\Omega}, \tag{2}$$

donde $\mathbf{curl}\,\varphi := \begin{cases} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^{\mathtt{t}} & \text{si} \quad n = 2 \\ \nabla \times \varphi & \text{si} \quad n = 3 \end{cases}$.

a) En esta parte se pide deducir (2) para el caso $n = 2$, procediendo de la siguiente manera. Introduzca primero un abierto acotado y **convexo** G de clase $C^{0,1}$ y suficientemente grande tal que $\overline{\Omega} \subset G$. Luego, dado $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, defina $f_{\boldsymbol{\tau}} := \begin{cases} \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} & \text{en} \quad \Omega \\ 0 & \text{en} \quad G\setminus\overline{\Omega} \end{cases}$, y considere el problema de valores de contorno:

$$\Delta w = f_{\boldsymbol{\tau}} \quad \text{en} \quad G, \quad w = 0 \quad \text{en} \quad \partial G. \tag{3}$$

Pruebe que (3) está bien propuesto, observe que $\mathrm{div}\big(\nabla w\big) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau}$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, y entonces concluya utilizando el resultado que dice que "$\boldsymbol{\zeta} \in [L^2(\Omega)]^2$ satisface $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\zeta} = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si y sólo si existe $\phi \in H^1(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{curl}\,\phi$ en Ω", y notando que para $n = 2$ se tiene que $\|\mathbf{curl}\,\phi\|_{0,\Omega} = |\phi|_{1,\Omega}$.

b) Cuando $n = 3$ se puede proceder de la misma manera anterior, utilizando ahora que "$\boldsymbol{\zeta} \in [L^2(\Omega)]^3$ satisface $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\zeta} = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si y sólo si existe $\phi \in [H^1(\Omega)]^3$ tal que $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{curl}\,\phi$ en Ω", pero en tal caso no es verdad que $\|\mathbf{curl}\,\phi\|_{0,\Omega} = |\phi|_{1,\Omega}$, y por lo tanto la cota de estabilidad (desigualdad al lado derecho de (2)) sólo resulta válida si el dominio original Ω es convexo. Con el objeto de subsanar esta dificultad, se propone el siguiente procedimiento, el cual hace uso de la misma geometría ya descrita para definir una extensión apropiada desde Ω hacia todo G. Más precisamente, dado $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, denote por $\mathbf{n}$ el vector normal interior en $\partial\Omega$, y considere el siguiente problema de valores de contorno en $G\setminus\overline{\Omega}$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad G\setminus\overline{\Omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial G. \tag{4}$$

Pruebe que (4) está bien propuesto, defina $\widetilde{\boldsymbol{\tau}} := \begin{cases} \boldsymbol{\tau} & \text{en} \quad \Omega \\ \nabla u & \text{en} \quad G\setminus\overline{\Omega} \end{cases}$, muestre que $\widetilde{\boldsymbol{\tau}} \in H(\mathrm{div};G)$, y concluya el resultado requerido haciendo uso primero de (2) para $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}$ y el dominio convexo G, y luego restringiendo lo obtenido a Ω.

GGP/ggp