UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Miércoles, 13 de Noviembre de 2013 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (1 PUNTO) Encuentre el único polinomio b_K de grado ≤ 4 que se anula en la frontera del tetraedro K de vértices $(0,1,2)$, $(1,1,1)$, $(0,0,3)$ y $(0,0,0)$, y que vale $1/2$ en el baricentro respectivo.

2. (2.5 PUNTOS) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean Γ_D, $\Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| \neq 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Se sabe que

$$H^{1/2}(\Gamma_*) := \Big\{ \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} : \quad w \in H^1(\Omega) \Big\} \qquad \forall * \in \{D, N\},$$

con $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_*} := \inf \Big\{ \|w\|_{1,\Omega} : \quad w \in H^1(\Omega), \quad \gamma_0(w)|_{\Gamma_*} = \varphi \Big\} \ \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_*)$. A su vez, denotando por $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \to L^2(\Gamma)$ el operador de extensión nula

$$E_{N,0}(\varphi) := \begin{cases} \varphi & \text{en} \quad \Gamma_N \\ 0 & \text{en} \quad \Gamma \backslash \Gamma_N \end{cases} \qquad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N),$$

se tiene que $H^{1/2}_{00}(\Gamma_N) := \Big\{ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_N) : \quad E_{N,0}(\varphi) \in H^{1/2}(\Gamma) \Big\}$, con norma inducida $\|\varphi\|_{1/2,00,\Gamma_N} := \|E_{N,0}(\varphi)\|_{1/2,\Gamma} \ \forall \varphi \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$.

i) Pruebe que para cada $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ existe un único $w_\varphi \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi$ y $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma_D} = \|w_\varphi\|_{1,\Omega}$.

ii) Dado $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno

$$\Delta z_\varphi = 0 \ \text{en} \ \Omega, \quad \gamma_0(z_\varphi)|_{\Gamma_D} = \varphi \ \text{en} \ \Gamma_D, \quad \gamma_1(z_\varphi) = 0 \ \text{en} \ \Gamma_N, \tag{1}$$

y demuestre fundadamente, utilizando una adecuada fórmula de integración por partes, que $z_\varphi = \widetilde{z}_\varphi + w_\varphi$, donde $\widetilde{z}_\varphi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ es tal que

$$\int_\Omega \nabla \widetilde{z}_\varphi \cdot \nabla v = -\int_\Omega \nabla w_\varphi \cdot \nabla v \qquad \forall v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega). \tag{2}$$

Pruebe que (2) tiene solución única y concluya que $\|z_\varphi\|_{1,\Omega} \leq c\, \|\varphi\|_{1/2,\Gamma_D}$.

iii) Defina el operador $E_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \to H^{1/2}(\Gamma)$ por $E_D(\varphi) := \gamma_0(z_\varphi) \ \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, y pruebe que E_D es lineal y acotado.

iv) Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) = E_D(H^{1/2}(\Gamma_D)) \oplus E_{N,0}(H^{1/2}_{00}(\Gamma_N))$. Equivalentemente, dado $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, demuestren que existen únicos $\psi_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $\psi_N \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$ tales que $\psi = E_D(\psi_D) + E_{N,0}(\psi_N)$.

v) Deduzca a partir de iv) que, dado $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$, existen $\lambda_D \in H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $\lambda_N \in H^{-1/2}_{00}(\Gamma_N)$ tales que $\langle \lambda, \psi \rangle = \langle \lambda_D, \psi_D \rangle_{\Gamma_D} + \langle \lambda_N, \psi_N \rangle_{\Gamma_N} \ \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Concluya que si $\lambda|_{\Gamma_N} = 0$, λ se identifica con un funcional en $H^{-1/2}(\Gamma_D)$.

3. (1.5 PUNTOS) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y sean $\Gamma_D, \Gamma_N \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $|\Gamma_D| \neq 0$ y $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, considere el problema de valores de contorno

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega\,, \quad \gamma_0(u)|_{\Gamma_D} = g \text{ en } \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(u) = 0 \text{ en } \Gamma_N\,. \tag{3}$$

   i) Utilice lo que sea necesario del Problema 2 para probar que una formulación primal-mixta de (3) se reduce a: Hallar $(u, \lambda) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= F(v) \quad \forall\, v \in H\,, \\ b(u,\xi) &= G(\xi) \quad \forall\, \xi \in Q\,, \end{aligned} \tag{4}$$

   donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := H^{-1/2}(\Gamma_D)$, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales dadas por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{y} \quad b(v,\xi) := \langle \xi, \gamma_0(v) \rangle_{\Gamma_D} \quad \forall\, u,\, v \in H,\ \forall\, \xi \in Q\,,$$

   y los funcionales $F \in H'$ y $G \in Q'$ dependen de f y g, respectivamente.

   ii) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para probar que existe una única solución de (4), la cual depende continuamente de los datos f y g.

   iii) Sea H_h un subespacio arbitrario de dimensión finita de H y, dada una partición $\Big\{e_1, e_2, ..., e_n\Big\}$ de Γ_D, defina

$$Q_h := \Big\{ \xi_h \in L^2(\Gamma_D) : \quad \xi_h|_{e_j} \in P_0(e_j) \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\} \Big\}\,.$$

   Considere el sistema de Galerkin asociado a (4), suponga que b satisface la condición inf-sup discreta con una constante $\beta > 0$ independiente de las dimensiones de H_h y Q_h, y pruebe que dicho esquema discreto posee una única solución $(u_h, \lambda_h) \in H_h \times Q_h$. Establezca además la estimación de Cea y comente si acaso el error $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ depende o no de $\mathrm{dist}(\lambda, Q_h)$.

4. (1 PUNTO) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera poliédrica, y sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación regular de $\bar{\Omega}$ hecha de n-simplex o n-rectángulos, todos ellos afín-equivalentes a un elemento finito de referencia $\widehat{K}$. Como es usual, el parámetro h está dado por $h := \max\{\, h_K : \quad K \in \mathcal{T}_h \,\}$, donde h_K es el diámetro de K. Ahora, para todo $K \in \mathcal{T}_h$ se define el operador local $\Pi_K : H^1(K) \to L^2(K)$ como

$$\Pi_K(v) := \frac{1}{|K|} \int_K v \quad \forall\, v \in H^1(K)\,.$$

Además, se define el operador global asociado $\Pi : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ como

$$\Pi(v)\,|_K := \Pi_K(v|_K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h,\ \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\widehat{K}$, tal que

$$||\, v - \Pi(v)\,||_{L^2(\Omega)} \leq C\, h\, |v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

GGP/ggp