UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Miércoles, 7 de Noviembre de 2012 — *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (2 PUNTOS) Sea Ω un abierto acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^{0,1}$, y sea $H^{-1}(\Omega)$ (resp. $[H^{-1}(\Omega)]^n$) el dual de $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$). Utilizando que $C_0^\infty(\Omega)$ (resp. $[C_0^\infty(\Omega)]^n$) es denso en $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$), las aplicaciones identidad $i : L^2(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ y gradiente $\nabla : L^2(\Omega) \to [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ se extienden por densidad a operadores $i : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ y $\nabla : L^2(\Omega) \to [H^{-1}(\Omega)]^n$, respectivamente. En tal caso, se puede probar que existe $c_1 > 0$, que depende sólo de Ω, tal que

$$\|p\|_{0,\Omega} \,\le\, c_1 \Big\{ \|p\|_{-1,\Omega} \,+\, \|\nabla p\|_{-1,\Omega} \Big\} \quad \forall\, p \in L^2(\Omega)\,.$$

   a) Considere el operador $B := \mathcal{R}\,\nabla$, donde $\mathcal{R} : [H^{-1}(\Omega)]^n \to [H_0^1(\Omega)]^n$ es la aplicación de Riesz asociada, y demuestre que el rango de B es cerrado en $[H_0^1(\Omega)]^n$.

   b) Identifique el operador adjunto $B^* : [H_0^1(\Omega)]^n \to L^2(\Omega)$ y utilice resultados clásicos de análisis funcional para probar que div : $V^\perp \to L_0^2(\Omega)$ es un isomorfismo, donde $V := \Big\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n : \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Big\}$, $[H_0^1(\Omega)]^n = V \oplus V^\perp$, y $L_0^2(\Omega) := \Big\{ p \in L^2(\Omega) : \ \int_\Omega p = 0 \Big\}$.

   IND.: Una versión particular del Lema de Peetre-Tartar establece que, dados $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ y $B \in \mathcal{L}(X,Z)$, con X, Y y Z espacios de Banach, tales que para algún $c > 0$ se tiene que $\|x\| \,\le\, c \Big\{ \|A(x)\| \,+\, \|B(x)\| \Big\} \quad \forall\, x \in X$, entonces necesariamente $N(B)$ es de dimensión finita y existe $C > 0$ tal que $\operatorname{dist}(x, N(B)) \,\le\, C\,\|B(x)\| \quad \forall\, x \in X$.

2. (1 PUNTO) Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{R}$, considere el problema:

$$-\,\Delta u \,+\, \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,+\, \kappa_2\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} \,=\, g \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \qquad (1)$$

   donde $\mathbf{n}$ es el vector normal en Γ. Deduzca la formulación primal de (1) y encuentre la mayor región factible para $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ que asegura elipticidad de la forma bilineal resultante. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea correspondiente en términos de κ_1 y κ_2. Luego, reemplace el dato de Neumann por uno de Dirichlet homogéneo y pruebe en tal caso que la elipticidad indicada sólo depende de κ_2.

3. (2 PUNTOS) El propósito de este ejercicio es introducir un esquema de Galerkin no usual para el problema de valores de contorno:

$$-u'' + 3\,u' \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega :=]0,2[\,, \quad u(0) = u(2) = 0\,, \tag{2}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$. Para este efecto, proceda según se indica a continuación:

a) Para cada $j \in \{1,2,3\}$ encuentre y dibuje el único polinomio p_j de grado ≤ 2 tal que $(p_j(0), p_j(1), p'_j(1/3)) \,=\, \mathbf{e}_j$, donde $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Sea $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 2$ una partición UNIFORME de $\Omega :=]0,2[$ y denote $h := \frac{2}{n+1}$. Dado $i \in \{1,...,n+1\}$, utilice lo obtenido en a) y el cambio de variables $[x_{i-1}, x_i] \ni x \,=\, x_{i-1} + t\,h\,, \quad t \in [0,1]$, para encontrar los polinomios $p_{i,j}$ de grado ≤ 2, $j \in \{1,2,3\}$, tales que $(p_{i,j}(x_{i-1}), p_{i,j}(x_i), p'_{i,j}(\widetilde{x}_i)) \,=\, \mathbf{e}_j$, donde $\widetilde{x}_i := x_{i-1} + \frac{1}{3}\,h$.

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ introduzca el espacio de elementos finitos

$$H_n := \Big\{ v \in C(\bar{\Omega}) : \ v(0) = v(2) = 0, \ \text{y } v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_i \ \forall\, i \in \{1,...,n+1\} \Big\},$$

donde $\mathcal{P}_i := \langle \big\{ p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3} \big\} \rangle$, e identifique en particular una base de H_1.

d) Utilice H_n para definir el esquema de Galerkin asociado a (2), demuestre que este sistema discreto tiene solución única, y calcule la matriz de rigidez correspondiente para $n = 1$.

e) Qué ocurre en a) y b) si en vez de $1/3$ y $\widetilde{x}_i := x_{i-1} + \frac{1}{3}\,h$ se considera $1/2$ y $\widetilde{x}_i := x_{i-1} + \frac{1}{2}\,h$? Qué ocurre si se elige cualquier $r \in]0,1[$, $r \neq 1/2$, y $\widetilde{x}_i := x_{i-1} + r\,h$?

4. (1 PUNTO) Sean Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{K} \in [C(\overline{\Omega})]^{n\times n}$ un tensor simétrico y uniformemente definido positivo. Se puede probar que la formulación variacional mixta del problema: $-\operatorname{div}\big\{\mathbf{K}\,\nabla u\big\} \,=\, f$ en Ω, $u \,=\, g$ en Γ, consiste en hallar un par $(\sigma, u) \in H(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \mathbf{K}^{-1}\,\sigma\cdot\tau \,+\, \int_\Omega u \operatorname{div}\tau \,-\, \int_\Omega v \operatorname{div}\sigma \,=\, \int_\Omega f\,v \,+\, \langle \tau\cdot\mathbf{n}, g\rangle$$

para todo $(\tau, v) \in H(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal en Γ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$. Luego, dados δ_1, δ_2, $\delta_3 > 0$, agregue las ecuaciones

$$\delta_1 \int_\Omega (\nabla u - \sigma)\cdot\nabla v = 0 \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \quad \delta_2 \int_\Gamma u\,v \,=\, \delta_2 \int_\Gamma g\,v \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$

$$\delta_3 \int_\Omega \operatorname{div}\sigma \operatorname{div}\tau \,=\, -\,\delta_3 \int_\Omega f \operatorname{div}\tau \quad \forall\, \tau \,\in\, H(\operatorname{div};\Omega)\,,$$

y demuestre que, eligiendo convenientemente estas constantes, la forma bilineal resultante es $H(\operatorname{div};\Omega) \times H^1(\Omega)$-elíptica.

GGP/ggp