UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Miércoles, 4 de Noviembre de 2009 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H, \|\cdot\|_H)$ un espacio de Hilbert real y $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada con operador inducido $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H,H)$. Suponga que existen operadores $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2 \in \mathcal{L}(H,H)$ y constantes α_1, $\alpha_2 > 0$ tales que
$$\langle \mathbf{S}_1^* \mathbf{A}(\tau), \tau\rangle_H \,\geq\, \alpha_1 \,\|\tau\|_H^2 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{S}_2(\tau), \tau\rangle_H \,\geq\, \alpha_2 \,\|\tau\|_H^2 \quad \forall\, \tau \in H\,.$$
   a) Pruebe que para todo $F \in H'$ existe un único $\sigma \in H$ tal que
$$A(\sigma,\tau) \,=\, F(\tau) \qquad \forall\, \tau \in H\,, \tag{1}$$
   y deduzca la existencia de $C > 0$, independiente de F, tal que
$$\|\sigma\|_H \,\leq\, C\,\|F\|_{H'}\,.$$
   b) Sea $\{H_h\}_{h>0}$ una familia numerable de subespacios de dimensión finita de H tal que $\lim\limits_{h\to 0} \operatorname{dist}(\tau, H_h) = 0$ $\forall\, \tau \in H$, y, dado $F \in H'$, considere el esquema de Galerkin: Hallar $\sigma_h \in H_h$ tal que
$$A(\sigma_h,\tau_h) \,=\, F(\tau_h) \qquad \forall\, \tau_h \in H_h\,. \tag{2}$$
   Suponga que para $i = 1$ o para $i = 2$ (pero no para ambos), existen operadores inyectivos $\mathbf{S}_{i,h} \in \mathcal{L}(H_h, H_h)$ para todo $h > 0$, y constantes C_i, $\delta > 0$, independientes de h, tales que
$$\|\mathbf{S}_i(\tau_h) \,-\, \mathbf{S}_{i,h}(\tau_h)\|_H \,\leq\, C_i\, h^\delta\, \|\mathbf{S}_i(\tau_h)\|_H \quad \forall\, \tau_h \in H_h\,.$$
   Demuestre que existe $h_0 > 0$ tal que para todo $h \leq h_0$ el problema (2) tiene solución única, es estable, y se verifica la estimación de Cea.
   c) Qué puede decir sobre las hipótesis para a) y b) si A es simétrica ?

(20 Puntos)

2. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ Lipschitz-continua, y considere la aplicación $|||\cdot||| : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por
$$|||v||| \,:=\, \left\{ |v|_{1,\Omega}^2 \,+\, \|\gamma_0(v)\|_{0,\Gamma}^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,$$
donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ es el operador de trazas usual. Utilice un argumento análogo al de la demostración de la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes en $H^1(\Omega)$.

(10 Puntos)

3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ Lipschitz-continua y defina

$$\mathcal{D}(\Gamma) := \{ v|_\Gamma : \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \}.$$

Pruebe que $H^{1/2}(\Gamma) \subseteq \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{0,\Gamma}}$ y $H^{1/2}(\Gamma) = \overline{\mathcal{D}(\Gamma)}^{\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}}$.

(10 Puntos)

4. Sea Ω^- un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ, y sea Ω^+ la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ. Además, sean $\gamma_0^- : H^1(\Omega^-) \to H^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^+ : H^1(\Omega^+) \to H^{1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega^- \cup \Gamma \cup \Omega^+$.

   a) Demuestre que $v \in H^1(\Omega)$ si y sólo si:

   $$v \in L^2(\Omega)\,,\ v|_{\Omega^-} \in H^1(\Omega^-)\,,\ v|_{\Omega^+} \in H^1(\Omega^+)\,,\ \text{ y } \ \gamma_0^-(v|_{\Omega^-}) = \gamma_0^+(v|_{\Omega^+}) \text{ en } \Gamma\,.$$

   Dados $f^- \in L^2(\Omega^-)$, $f^+ \in L^2(\Omega^+)$, $g_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y $g_\Sigma \in H^{-1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión: Hallar $(u^-, u^+) \in H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^+)$ tales que

   $$\begin{aligned} &-\Delta u^- = f^- \quad \text{en} \quad \Omega^-\,, \quad -\Delta u^+ = f^+ \quad \text{en} \quad \Omega^+\,,\\ &\gamma_0^-(u^-) = \gamma_0^+(u^+) \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \quad \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^-(\nabla u^-) - \gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma\,,\\ &\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+(\nabla u^+) = g_\Sigma \quad \text{en} \quad \Sigma\,, \quad \text{y} \quad \int_{\Omega^-} u^- + \int_{\Omega^+} u^+ = 0\,, \end{aligned} \tag{3}$$

   donde $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^- : H(\mathrm{div}\,;\Omega^-) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}^+ : H(\mathrm{div}\,;\Omega^+) \to H^{-1/2}(\partial\Omega^+) \equiv H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales respectivos ($\boldsymbol{\nu}$ apunta hacia Ω^+ en Γ y hacia el exterior de Ω^+ en Σ).

   b) Utilice identidades de Green en espacios de Sobolev convenientes y deduzca una formulación variacional de (3) con incógnita en un subespacio cerrado V de $H^1(\Omega)$.
   c) Identifique una condición de compatibilidad sobre los datos, y demuestre en tal caso que la formulación obtenida en b) posee una única solución, la cual depende continuamente de f^-, f^+, g_Γ, y g_Σ.
   d) Pruebe que el esquema de Galerkin asociado es convergente para cualquier familia numerable $\{V_h\}_{h>0}$ de subespacios de dimensión finita de V tales que $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{dist}(v, V_h) = 0 \ \ \forall\, v \in V$.
   e) Demuestre que la formulación obtenida en b) es equivalente a una formulación variacional mixta con incógnita en $H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$, y verifique que ella satisface las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi.

(20 Puntos)

5. Tarea individual.

(40 Puntos)

GGP/ggp