UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Martes, 31 de Octubre de 2006 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea $\Omega :=]a,b[$ y para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca una partición

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Además, denote $h := \max\Big\{ x_j - x_{j-1} : \quad j \in \{1,2,...,n\} \Big\}$, defina el espacio

$$V_h := \Big\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbf{P}_0([x_{j-1},x_j]) \quad \forall\, j \in \{1,2,...,n\} \Big\},$$

y considere el operador $\Pi_h : L^2(\Omega) \to V_h$ que a cada $v \in L^2(\Omega)$ le asigna su mejor aproximación $\Pi_h(v) \in V_h$ con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de n y de h, tal que

$$\|\, v - \Pi_h(v)\,\|_{L^2(\Omega)} \;\le\; C\,h\,|v|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,.$$

(20 Puntos)

2. Sean $\Omega :=]0,1[$, $f \in L^2(\Omega)$, $\kappa \in]0,2[$, y considere el problema de valores de contorno:

$$u'' + \kappa\, u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u(0) = u(1) = 0\,. \tag{1}$$

Además, para cada $n \in \mathbf{N}$ introduzca la partición uniforme

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1\,,$$

con $x_j - x_{j-1} = \dfrac{1}{n+1}$ $\forall\, j \in \{1,2,...,n+1\}$, y defina el espacio

$$H_n := \Big\{ v \in C(\bar\Omega) : \quad v|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbf{P}_1([x_{j-1},x_j]) \quad \forall\, j \in \{1,2,...,n+1\} \quad y \quad v(0) = v(1) = 0 \Big\}.$$

a) Establezca la formulación variacional de (1) y demuestre que ella posee una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.

b) Denote por $u_n \in H_n$ la solución (cuando ella existe) del esquema de Galerkin asociado y pruebe que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

(20 Puntos)

3. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno:

$$-\,\Delta\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

   a) Demuestre que una formulación variacional mixta de este problema se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \,\in\, H(\text{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \sigma \cdot \tau \, dx \,+\, \int_\Omega u \,\text{div}(\tau)\, dx \,-\, \int_\Omega v \,\text{div}(\sigma)\, dx \,=\, \int_\Omega f\, v\, dx \qquad (2)$$

   para todo $(\tau, v) \,\in\, H(\text{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$.

   b) Dados $\delta_1\,,\ \delta_2 \,>\, 0$, fundamente la introducción de las ecuaciones

$$\delta_1 \int_\Omega (\nabla u - \sigma) \cdot (\nabla v + \tau)\, dx = 0 \quad \forall\, (\tau, v) \in \mathbf{H} := H(\text{div};\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad (3)$$

$$\delta_2 \int_\Omega \text{div}(\sigma)\, \text{div}(\tau)\, dx \;=\; -\,\delta_2 \int_\Omega f\, \text{div}(\tau)\, dx \quad \forall\, \tau \,\in\, H(\text{div};\Omega)\,, \qquad (4)$$

   luego sume (2), (3) y (4), y obtenga una formulación variacional mixta modificada: Hallar $(\sigma, u) \,\in\, \mathbf{H}$ tal que

$$A((\sigma, u), (\tau, v)) \;=\; F(\tau, v) \qquad \forall\, (\tau, v) \,\in\, \mathbf{H}\,, \qquad (5)$$

   donde $A : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es una forma bilineal y $F \,:\, \mathbf{H} \to \mathbf{R}$ es un funcional lineal. Entonces, demuestre que, eligiendo δ_1 y δ_2 convenientemente, el problema (5) posee una única solución, la cual depende continuamente del dato f.

(15 Puntos)

4. Demuestre que $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}^n_+})$ es denso en $H^1(\mathbf{R}^n_+)$.

(15 Puntos)

5. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y defina el espacio

$$\mathcal{D}(\Gamma) \;:=\; \{\, v\,|_\Gamma \,: \quad v \,\in\, C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \,\}\,.$$

   Pruebe que $\mathcal{D}(\Gamma)$ es denso en $H^{1/2}(\Gamma)$.

(15 Puntos)

6. Trabajo y exposición.

(15 Puntos)

GGP/ggp