UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Teoría de Elementos Finitos (408.634)

Jueves 8 de Junio de 2000 *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (25 Puntos). Dados $\Omega := (0,1)$ y $f \in L^2(\Omega)$, interesa resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ u(0) &= 0\,, u'(1) \,=\, 1\,. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Construya una formulación variacional de (1) en el espacio V, donde

$$V \,:=\, \big\{ v \in H^1(\Omega) : \quad v(0) \,=\, 0 \big\}\,,$$

y demuestre, usando el Lema de Lax-Milgram, que ella tiene solución única. Además, dada una partición $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$ de Ω, establezca el esquema de Galerkin asociado al espacio de elementos finitos

$$V_n := \{ v \in C(\bar{\Omega}) : \; v(0) = 0 \text{ y } v|_{[x_{j-1},x_j]} \in P_1([x_{j-1},x_j]) \;\forall j \,=\overline{1,n+1} \}\,,$$

donde $P_1(S)$ denota el espacio de polinomios de grado ≤ 1 definidos sobre cualquier subconjunto S de Ω. Luego, asuma que la partición anterior es uniforme y calcule explícitamente la matriz de rigidez respectiva para $n = 1$.

b) Defina $\sigma := u'$ en Ω y demuestre que una formulación variacional **mixta** de (1) se reduce a: *Hallar* $(\sigma,(u,\varphi)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,(u,\varphi)) &= F(\tau) \quad \forall\, \tau \in H\,, \\ b(\sigma,(v,\psi)) &= G((v,\psi)) \quad \forall\,(v,\psi) \in Q\,, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $H := H^1(\Omega)$, $Q := L^2(\Omega) \times \mathbf{R}$, $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) &:= \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx \qquad \forall\,\sigma,\,\tau \in H\,, \\ b(\tau,(v,\psi)) &:= \int_\Omega v\,\tau'\,dx \,+\, \psi\,\tau(1) \quad \forall\,(\tau,(v,\psi)) \in H \times Q\,. \end{aligned}$$

c) Aplique la teoría de Babuŝka-Brezzi para demostrar que (2) tiene una única solución.

Problema 2 (15 Puntos). Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ una partición del intervalo $\Omega := (a,b)$. Sea H_n un espacio de funciones definidas sobre Ω y para cada $i \in \{1,...,n+1\}$ denote por $H_{n,i}$ el espacio de restricciones de H_n al subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

a) Demuestre que si $H_n \subseteq C(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^1(x_{i-1}, x_i)$ $\forall\, i \in \{1,...,n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^1(\Omega)$.

b) Demuestre que si $H_n \subseteq C^1(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^2(x_{i-1}, x_i)$ $\forall\, i \in \{1,...,n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^2(\Omega)$.

Problema 3 (25 Puntos).

a) Para cada $j \in \{1,2,3,4\}$ encuentre el único polinomio p_j de grado ≤ 3 tal que $(p_j(0), p_j'(0), p_j(1), p_j'(1))^{\mathbf{T}} = \mathbf{e}_j^{\mathbf{T}}$, donde $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbf{R}^4$.

b) Sea $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$ una partición **uniforme** de $\Omega := (0,1)$. Para todo $i \in \{1,...,n+1\}$ y para cada $j \in \{1,2,3,4\}$, encuentre el polinomio $p_{i,j}$ de grado ≤ 3 tal que $(p_{i,j}(x_{i-1}), p_{i,j}'(x_{i-1}), p_{i,j}(x_i), p_{i,j}'(x_i))^{\mathbf{T}} = \mathbf{e}_j^{\mathbf{T}}$. (**Indicación:** Denote $h := \frac{1}{n+1}$ y utilice lo obtenido en **a)** en conjunto con un cambio de variable afin entre $[0,1]$ y $[x_{i-1}, x_i]$).

c) Para cada $i \in \{1,...,n+1\}$ denote por $\mathcal{P}_i$ al espacio de funciones definidas sobre $[x_{i-1}, x_i]$, generado por los polinomios $p_{i,j}$, $j \in \{1,2,3,4\}$, y defina el espacio de elementos finitos

$$H_n := \{\, v \in C^1(\bar{\Omega}) : \; v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0, \quad \text{y}$$

$$v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_i \quad \forall\, i \in \{1,...,n+1\}\,\}\,.$$

Pruebe que $H_n \subseteq H_0^2(\Omega) := \{v \in H^2(\Omega) : \; v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0\}$, y defina explícitamente una base de H_1.

d) Considere el problema de valores de contorno

$$\begin{aligned} u^{(4)} &= f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ u(0) = u'(0) &= u(1) = u'(1) = 0\,, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $f(x) := x$ para todo $x \in \Omega$. Demuestre que la formulación débil de (3) se reduce a encontrar $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u''\, v''\, dx = \int_\Omega x\, v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^2(\Omega)\,. \tag{4}$$

Establezca el esquema de Galerkin asociado a (4) utilizando el espacio de elementos finitos H_1 definido en **c)**, y calcule el vector de carga respectivo.

Problema 4 (15 Puntos). Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina el espacio $H(\mathrm{div};\Omega) := \{ v \in [L^2(\Omega)]^n$ tal que $\mathrm{div}\, v \in L^2(\Omega) \}$, provisto del producto escalar

$$< v, w >_{H(\mathrm{div};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\, v \, \mathrm{div}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{div};\Omega)\,.$$

Demuestre que $(H(\mathrm{div};\Omega); < \cdot, \cdot >_{H(\mathrm{div};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert. Además, utilice el hecho que $[C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$ es denso en $H(\mathrm{div};\Omega)$ para probar que existe un operador lineal y continuo $\gamma : H(\mathrm{div};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) = u \cdot \nu \;\forall\, u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^n$, donde ν es el vector normal unitario exterior a Γ.

Problema 5 (20 Puntos). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\, \mathrm{tr}\, \mathbf{e}(\mathbf{u})\, \mathbf{I}_2 + 2\mu\, \mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{5}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,, \tag{6}$$

donde $\lambda,\, \mu > 0$ son las constantes de Lamé, $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\left(\nabla\, \mathbf{u} + (\nabla\, \mathbf{u})^{\mathbf{T}}\right)$ es el tensor de deformaciones.

a) Demuestre que la ecuación constitutiva (5) (Ley de Hooke) puede invertirse para obtener

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\mu}\, \boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\, \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\, \mathbf{I}_2 \quad \text{en} \quad \Omega\,. \tag{7}$$

b) Verifique que el tensor de deformaciones puede re-escribirse como

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \nabla\, \mathbf{u} \,-\, \boldsymbol{\gamma} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{8}$$

donde $\boldsymbol{\gamma} := \frac{1}{2}\left(\nabla\, \mathbf{u} - (\nabla\, \mathbf{u})^{\mathbf{T}}\right)$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio $\mathcal{R} := \{\, \boldsymbol{\eta} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{T}} = 0 \,\}$.

c) Aplique integración por partes a la combinación de (7) y (8), y utilice (6), para demostrar que una formulación variacional **mixta** de este problema se reduce a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})) \;&=\; 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})) \;&=\; -\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx \quad \forall\, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{Q}\,, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{H} := \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$, $\mathbf{Q} := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$, $b : \mathbf{H} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{2\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}\,,$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta}\, dx \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}\,.$$

Problema 6 (20 Puntos). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina el espacio $V := \left\{ v \in H^2(\Omega) : \gamma_0 v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \right\}$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que $||v||_{H^1(\Omega)} \leq C \, ||\Delta \, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall \, v \in V$. Concluya que la norma $|| \cdot ||_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $| \cdot |_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V.

Problema 7 (20 Puntos). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente regular. Utilice el hecho que la inyección de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta para demostrar que las inyecciones de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ y de $H^2(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ son compactas.