UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1 MAT 408.607

Ecuaciones Diferenciales Parciales

9 de Noviembre de 2001
Prof. Gabriel N. Gatica

Problema 1 (20 Ptos.)

a) Suponga las regularidades necesarias para los datos involucrados, y deduzca una formula explícita para la solución del problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + cu &= f \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^n \times (0,+\infty)\,, \\ u &= g \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^n \times \{t=0\}\,, \end{aligned}$$

donce $c \in \mathbf{R}$. (**Indicación:** considere la función $v(x,t) := u(x,t)\, e^{ct}$).

b) Extienda lo anterior al caso en que la constante c se reemplaza por una función continua $h(t)$, $t \in [0,\infty)$.

Problema 2 (Método de reflección) (30 Pts.) Considere el problema de valores de contorno/iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad &\text{en} \quad \mathbf{R}_+ \times (0,+\infty)\,, \\ u = g\,, \quad u_t = h \quad &\text{en} \quad \mathbf{R}_+ \times \{t=0\}\,, \\ u = 0 \quad &\text{en} \quad \{x=0\} \times (0,+\infty)\,, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{R}_+ := \{x \in \mathbf{R} : \quad x > 0\}$, y g, h son funciones dadas que satisfacen $g(0) = h(0) = 0$. Extienda $u(\cdot,t)$, $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$ a todo $\mathbf{R}$ por reflección impar, esto es

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t) & \text{si} \quad x \geq 0,\ t \geq 0\,, \\ -u(-x,t) & \text{si} \quad x \leq 0,\ t \geq 0\,, \end{cases}$$

y similarmente para $\tilde{g}$ y $\tilde{h}$. Demuestre que $\tilde{u}$ satisface la ecuación de la onda uni-dimensional en $\mathbf{R} \times (0,+\infty)$ con datos iniciales $\tilde{g}$, $\tilde{h}$, y aplique la fórmula de D'Alembert para concluir que

$$u(x,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,[g(x+t) + g(x-t)] \,+\, \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy & \text{si} \quad x \geq t \geq 0\,, \\ \dfrac{1}{2}\,[g(x+t) - g(t-x)] \,+\, \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-x+t}^{x+t} h(y)\,dy & \text{si} \quad 0 \leq x \leq t\,. \end{cases}$$

Problema 3 (20 Pts.) Dado $r > 0$, defina $\Omega := B(\mathbf{0}, r)$ en $\mathbf{R}^3$, y considere una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que: $-\Delta u = f$ en Ω, $u = g$ en $\partial\Omega$. Modifique la demostración de la fórmula del valor medio y pruebe que

$$u(\mathbf{0}) = \fint_{\partial\Omega} g(s)\, ds \;+\; \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{r} \right) f(x)\, dx\,.$$

Problema 4 (Método de descenso) (30 Pts.) Sea $u \in C^2(\mathbf{R}^2 \times [0, \infty))$ una solución del problema de valores iniciales

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^2 \times (0, \infty)\,, \\ \\ u = g\,, \quad u_t = h\,, \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^2 \times \{t = 0\}\,. \end{array} \right.$$

a) Defina $\bar{u} : \mathbf{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ por $\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t)$ $\forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\forall\ t \geq 0$, y demuestre que $\bar{u}$ satisface la ecuación de la onda en $\mathbf{R}^3 \times [0, \infty)$ con datos iniciales $\bar{g}$ y $\bar{h}$ en $\mathbf{R}^3 \times \{t = 0\}$, donde $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2)$ y $\bar{h}(x_1, x_2, x_3) := h(x_1, x_2)$.

b) Pruebe que

$$\fint_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g}(s)\, ds \;=\; \frac{1}{2\pi t^2} \int_{B(x,t)} g(y)\ \left[1 + \|\nabla\gamma(y)\|^2\right]^{1/2}\, dy\,,$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2, 0)$, $B(\bar{x}, t)$ es la bola en $\mathbf{R}^3$ con centro en $\bar{x}$ y radio t, y $\gamma(y) := (t^2 - \|y - x\|^2)^{1/2}$ $\ \forall\ y \in B(x, t)$.

c) Aplique la fórmula de Kirchhoff a $\bar{u}$ y deduzca que la solución de (1) está dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t \nabla g(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - \|y - x\|^2)^{1/2}}\, dy \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^2\,, \quad \forall\, t \geq 0\,.$$

(Fórmula de Poisson)