UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Análisis Funcional (408601)

Lunes 16 de Mayo de 2011 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean U y V subespacios cerrados de un espacio vectorial normado X, y suponga que existe $r > 0$ tal que

$$r \sup_{\substack{x \in \overline{U+V} \\ \|x\| \leq 1}} F(x) \leq \sup_{\substack{x \in U \\ \|x\| \leq 1}} F(x) + \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} F(x) \qquad \forall\, F \in X' .$$

Razone por contradicción y aplique la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach para concluir que

$$B_{\overline{U+V}}(\theta, r) \subseteq \overline{B_U(\theta, 1) + B_V(\theta, 1)} .$$

[20 puntos]

2. El presente ejercicio apunta a aplicar la teoría desarrollada para el análisis de la función spline de interpolación a otras dos situaciones distintas, pero con características similares.

   a) Sean $\Omega :=]a, b[$, $n \in \mathbb{N}$, y considere la partición $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$. Además, sean $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha,\ \beta > 0$. Luego, dado $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^n$, se pide analizar la solubilidad del siguiente problema: Hallar $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$ tal que $u_1(t_i) - u_2(t_i) = z_i \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y de modo que

$$\alpha \int_\Omega (u_1^{(m)}(t))^2\, dt + \beta \int_\Omega (u_2^{(m)}(t))^2\, dt$$
$$= \min_{\substack{\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \\ v_1(t_i) - v_2(t_i) = z_i \ \forall\, i}} \left\{ \alpha \int_\Omega (v_1^{(m)}(t))^2\, dt + \beta \int_\Omega (v_2^{(m)}(t))^2\, dt \right\}$$

   Se genera algún cambio en su análisis si la condición de interpolación se reemplaza por $v_1(t_i) = v_2(t_i) = z_i\ \forall\, i$? Explique y fundamente.

   b) Sea S un subespacio de dimensión finita N de un Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, y sea $\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ una base de S. Además, sea $\Pi : H \to S^\perp$ el proyector ortogonal. Demuestre que para cada $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_N)^{\mathtt{t}} \in \mathbb{R}^N$ existe un único $u \in H$ tal que $\langle u, p_i\rangle_H = z_i \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, y de modo que

$$\|\Pi(u)\|_H = \min_{\substack{v \in H \\ \langle v, p_i\rangle_H = z_i \ \forall\, i}} \|\Pi(v)\|_H$$

   Deduzca un algoritmo para calcular u. **[30 puntos]**

3. Sea Ω un dominio convexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y sean $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ los productos escalares de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente.

   a) Pruebe que para todo $r \in L^2(\Omega)$ existe un único $z \in H^1(\Omega)$ tal que

   $$\langle z, w \rangle_{H^1(\Omega)} \;=\; \langle r, w \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, w \,\in\, H^1(\Omega)\,.$$

   b) Deduzca que z es la única solución débil del problema de valores de contorno:

   $$-\,\Delta z \,+\, z \;=\; r \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

   donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal sobre Γ, y **observe** (no lo demuestre) que la convexidad de Ω garantiza que $z \in H^2(\Omega)$.

   c) Defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe $C > 0$ tal que

   $$\|z\|_{H^2(\Omega)} \;\leq\; C\,\|r\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, r \,\in\, L^2(\Omega)\,.$$

[20 puntos]

4. Sea G un subespacio de un espacio vectorial normado X, y sea N un subespacio del dual de un espacio de Banach reflexivo Y. Demuestre que:

   a) $\displaystyle \mathrm{dist}(f, G^o) \;=\; \sup_{\substack{x\in\overline{G}\\ \|x\|\leq 1}} |f(x)| \qquad \forall\, f \,\in\, X'\,.$

   b) $\overline{N} \;=\; ({}^oN)^o\,.$

   c) $\displaystyle \mathrm{dist}(y, {}^oN) \;=\; \sup_{\substack{g\in\overline{N}\\ \|g\|\leq 1}} |g(y)| \qquad \forall\, y \,\in\, Y\,.$

   d) $\displaystyle \mathrm{dist}(g, \overline{N}) \;=\; \sup_{\substack{y\in {}^oN\\ \|y\|\leq 1}} |g(y)| \qquad \forall\, g \,\in\, Y'\,.$

[30 puntos]

GGP/ggp