UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 1

Análisis Funcional (408601)

Miércoles, 16 de Noviembre de 2005 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea U un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$. Se dice que V es un SUPLEMENTO TOPOLÓGICO de U si V es un subespacio cerrado de X tal que $X = U \oplus V$.

   a) Dado un conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de n vectores linealmente independientes de X, demuestre que existen $F_1, F_2, ..., F_n \in X'$ tales que $F_j(x_i) = \delta_{ij}$ $\forall\, i, j \in \{1, ..., n\}$.

   b) Pruebe que ${}^\circ\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ es un suplemento topológico del espacio vectorial generado por $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

2. Sea Ω un dominio convexo y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ, y sean $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ los productos escalares de $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente.

   a) Pruebe que para todo $r \in L^2(\Omega)$ existe un único $z \in H^1(\Omega)$ tal que
   $$\langle z, w \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle r, w \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, w \in H^1(\Omega)\,.$$

   b) Deduzca que z es la única solución débil del problema de valores de contorno:
   $$-\Delta z + z = r \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla z \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$
   donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal sobre Γ, y **observe** (no lo demuestre) que la convexidad de Ω garantiza que $z \in H^2(\Omega)$.

   c) Defina un operador lineal apropiado y demuestre, utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, que existe $C > 0$ tal que
   $$\|z\|_{H^2(\Omega)} \le C\,\|r\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, r \in L^2(\Omega)\,.$$

3. Sean E y F espacios de Banach, y sea $T : E \to F$ un operador lineal cerrado con dominio $D(T)$ e imagen $R(T)$. Demuestre que son equivalentes:

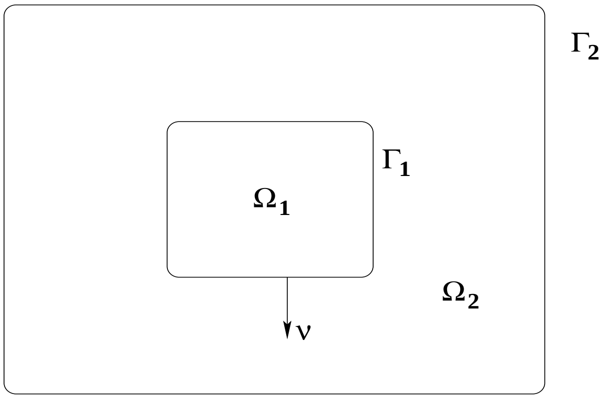
   a) El operador T es inyectivo, y T^{-1} es acotado sobre $R(T)$.

   b) Existe una constante positiva C tal que $\|Tx\| \ge C\|x\|$ para todo $x \in D(T)$.

   c) $R(T)$ es cerrado en F, y T es inyectivo.

4. Sea Ω_1 un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ_1, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ_1 y por una curva cerrada Γ_2 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_1$ (ver figura). Entonces, dados $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, y $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, interesa el siguiente PROBLEMA DE TRANSMISIÓN: Hallar $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tales que

$$\begin{gathered} -\Delta u_1 = f_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \qquad -\Delta u_2 = f_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\ u_1 - u_2 = g_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \quad u_2 = g_2 \quad \text{en} \quad \Gamma_2\,. \end{gathered} \tag{1}$$



a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA de (1) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega_1) \times H(\mathrm{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\xi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma_i \cdot \tau_i \, dx + \int_{\Omega_i} u_i \,\mathrm{div}\, \tau_i \, dx \right\} + \langle \tau_1 \cdot \nu - \tau_2 \cdot \nu, \xi \rangle_{\Gamma_1} &= \quad F(\boldsymbol{\tau})\,, \\ \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i \,\mathrm{div}\, \sigma_i \, dx + \langle \sigma_1 \cdot \nu - \sigma_2 \cdot \nu, \lambda \rangle_{\Gamma_1} &= \quad G(\mathbf{v}, \lambda)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega_1) \times H(\mathrm{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \langle \tau_1 \cdot \nu, g_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \tau_2 \cdot \nu, g_2 \rangle_{\Gamma_2} \quad \text{y} \quad G(\mathbf{v}, \lambda) := -\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f_i \, v_i \, dx\,.$$

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que el problema (2) posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \xi)$ en los espacios indicados.

5. Sean U un espacio vectorial normado y V un espacio de Banach. Además, sea $P : U' \to \mathcal{L}(U, V)$ un operador lineal cerrado tal que $N(P)$ es el funcional nulo sobre U y $R(P) = \mathcal{L}(U, V)$. Demuestre que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \, ||F||_{U'} \;\leq\; ||P(F)||_{\mathcal{L}(U,V)} \quad \forall\, F \,\in\, \mathcal{D}(P)\,.$$

6. Sean X, Y, Z espacios de Hilbert y sean $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z,X)$. Demuestre que $(AB)^* = B^* A^*$. Suponga que A es invertible y demuestre que A^* tambien lo es, con $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

7. Sea X un espacio de Hilbert y sea V un subespacio cerrado de X. Demuestre que X/V y $V^\perp$ son isomorfos.

GGP/ggp