UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA UNICA

Análisis Funcional (408601).

Martes 9 de Agosto de 2005 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (Teorema de Hahn-Banach sobre $\mathbb{C}$). Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y sea $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$p(\alpha\, x) \,=\, |\alpha|\, p(x) \quad \text{y} \quad p(x+y) \,\leq\, p(x) \,+\, p(y) \qquad \forall\, \alpha \,\in\, \mathbb{C}\,,\ \forall\, x\,,\, y \,\in\, X\,.$$

Además, sean S un subespacio de X y $f \,\in\, S'$ tales que

$$|f(x)| \,\leq\, p(x) \qquad \forall\, x \,\in\, S\,.$$

Demuestre que f puede extenderse a un funcional $F \,\in\, X'$ tal que

$$|F(x)| \,\leq\, p(x) \qquad \forall\, x \,\in\, X\,.$$

2. (Aplicación simple del Teorema de Hahn-Banach). Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

   a) Dados un conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ de N vectores linealmente independientes de X y $\{a_1, a_2, ..., a_N\} \subseteq \mathbb{C}$, pruebe que existe $F \in X'$ tal que $F(x_j) \,=\, a_j$ para todo $j \in \{1, ..., N\}$.
   b) Utilice a) para probar que todo subespacio Y de dimensión finita admite un suplemento topógico.

3. (Inverso a izquierda). Sean E, F espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $N(T) \,=\, \{0\}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que $S\,T \,=\, I : E \to E$.
   b) $R(T)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en F.

4. (Aplicación de reflexividad). Sean E y F espacios de Banach y sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \to F$ lineal cerrado tal que $\mathcal{D}(A)$ es denso en E. Pruebe que si E es reflexivo entonces $N(A)^{\perp} \,=\, \overline{R(A^*)}$.

5. (Topología débil). Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \to (F, \sigma(F, F'))$ un operador lineal y continuo. Pruebe que $T : E \to F$ también es continuo.

6. (Topología débil estrella). Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$. Demuestre que una base de vecindades de f con respecto a la topología $\sigma(E', E)$ está dada por conjuntos de la forma

$$V := \{ g \in E' : \quad |g(x_j) - f(x_j)| < \epsilon \quad \forall j \in \{1, 2, ..., N\} \} ,$$

con $N \in \mathbb{N}$, $x_j \in E \quad \forall j \in \{1, 2, ..., N\}$ y $\epsilon > 0$.

7. (Topologías y espacios de Hilbert). Sea E un espacio de Hilbert.

   a) Defina, con la mayor simplicidad posible, las topologías $\sigma(E, E')$ y $\sigma(E', E)$.
   b) Pruebe explícitamente (sin usar el resultado más general dado en clases) que la bola unitaria cerrada de E es compacta en $\sigma(E, E')$.

8. (Operador normal). Sea H un Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Se dice que $A \in \mathcal{L}(H, H)$ es un operador normal si $A^* A = A A^*$. Pruebe en este caso que:

   a) $\lambda \in VP(A)$ si y sólo si $\bar{\lambda} \in VP(A^*)$. Concluya además que $N(A - \lambda I) = N(A^* - \bar{\lambda} I)$.
   b) Si λ, $\mu \in VP(A)$, $\lambda \neq \mu$, entonces $N(A - \lambda I) \perp N(A^* - \mu I)$.

9. (Valores propios de Δ). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz-continua. Demuestre que existen una base Hilbertiana $\{ e_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$, y una sucesión $\{ \lambda_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales con $\lambda_n > 0$, y $\lambda_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$, tales que $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, y $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ en Ω. Se dice aquí que los λ_n son los valores propios del Laplaciano (con condición de Dirichlet), y que las e_n son las funciones propias asociadas.

10. (Espectro autoadjunto). Sean H un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(H, H)$ un operador autoadjunto. Dado un subespacio cerrado S de H invariante con respecto a A, denote por $\sigma(A, S)$ y $\sigma(A, S^\perp)$ los espectros de las restricciones $A|_S$ y $A|_{S^\perp}$, respectivamente. Demuestre que $\sigma(A) = \sigma(A, S) \cup \sigma(A, S^\perp)$.

Elija 7 problemas

GGP/ggp