UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION DE RECUPERACION, MAT 525441

Análisis Numérico II: Algebra Lineal Numérica.

Primer Semestre de 2003. Profesor *Gabriel N. Gatica.*

1. **(1.0 Puntos)**

   Encuentre todos los valores singulares de $A = (2+3i)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

   Además, calcule $\|A\|_2$ y $\|A\|_F$.

2. **(1.5 Puntos)**

   Considere la matriz $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Use reflectores de Householder para encontrar una matriz de Hessenberg superior B, similar a A. Use rotaciones de Jacobi para encontrar una factorización QR de B.

3. **(1.0 Puntos)**
   Dado $m \in \mathbb{N}$, considere el espacio vectorial $V := \mathbb{R}^m$ provisto del producto interior usual, y denote por $\mathbf{1}$ al vector $(1,1,\ldots,1)^t$.

   a) Demuestre que $V = U \oplus W$, donde $U := \{\mathbf{x} \in V : \sum_{i=1}^{m} x_i = 0\}$ y $W = \{c\mathbf{1} : \ c \in \mathbb{R}\}$.

   b) Encuentre las matrices que definen los proyectores ortogonales sobre los subespacios U y $U^\perp$.

4. **(2.5 Puntos)**
   Sean $\varphi,\ \theta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, y considere $p,\ q \in \{1,...,m\}$ tales que $p < q$. Defina la matriz $U := (u_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$, donde

$$u_{ij} := \begin{cases} e^{i\theta}\cos\varphi & \text{si} \quad i = j = p \\ e^{i\theta}\operatorname{sen}\varphi & \text{si} \quad i = p \quad \text{y} \quad j = q \\ -\operatorname{sen}\varphi & \text{si} \quad i = q \quad \text{y} \quad j = p \\ \cos\varphi & \text{si} \quad i = j = q \\ \delta_{ij} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Demuestre que U es unitaria.

   b) Encuentre las formulas que transforman una matriz hermitiana arbitraria $A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ en la matriz similar $U^* A U$. Deduzca los valores de φ y θ que hacen que el coeficiente (p,q) de $U^* A U$ se anule.