UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA DE RECUPERACION

Análisis Funcional (4220014)

Lunes 17 de Agosto de 2015 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(Q, \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$ espacios de Hilbert tales que $H \subseteq Q$, y suponga que existe $A \in \mathcal{L}(H,Q)$ such that
$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle_H \,=\, \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle_Q \,+\, \langle A(\boldsymbol{\zeta}), A(\boldsymbol{\tau}) \rangle_Q \qquad \forall\, \boldsymbol{\zeta},\ \boldsymbol{\tau} \in H\,.$$
A su vez, dados $\boldsymbol{\sigma} \in H$ y $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios de dimension finita de H, considere para cada $n \in \mathbb{N}$ una aproximación $\boldsymbol{\sigma}_n \in H_n$ de $\boldsymbol{\sigma}$ tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n\|_Q \,<\, +\infty$. Luego, asuma que $A(\boldsymbol{\sigma})$ es conocido explícitamente, y defina una **aproximación postprocesada** de $\boldsymbol{\sigma}$ como el único elemento $\boldsymbol{\sigma}_n^* \in H_n$ (si es que existe) tal que
$$\langle \boldsymbol{\sigma}_n^*, \boldsymbol{\tau}_n \rangle_H \,=\, \langle \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\tau}_n \rangle_Q \,+\, \langle A(\boldsymbol{\sigma}), A(\boldsymbol{\tau}_n) \rangle_Q \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}_n \in H_n\,.$$
Pruebe que $\boldsymbol{\sigma}_n^*$ está efectivamente bien definido y concluya que
$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n^*\|_H \,\le\, \|\boldsymbol{\sigma} - \Pi_n(\boldsymbol{\sigma})\|_H \,+\, \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_Q\,,$$
donde $\Pi_n : H \longrightarrow H_n$ es el proyector ortogonal.

2. Sean H un espacio de Hilbert real y $\mathcal{R} : H' \longrightarrow H$ su operador de Riesz asociado. Demuestre que $A \,\in\, \sigma(H', H) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{R}(A) \,\in\, \sigma(H, H')$.

3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suave Γ, y sean $\{\boldsymbol{\sigma}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H(\mathrm{rot};\Omega)$ y $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathrm{rot};\Omega} \,=\, \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathrm{rot};\Omega}$ $\forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$. Demuestre que para cada $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ se tiene que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\sigma}_n\, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\tau} = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\tau}\,.$$
IND: Recuerde que el espacio $H(\mathrm{rot};\Omega)$, dado por
$$H(\mathrm{rot};\Omega) \,:=\, \left\{ \boldsymbol{\zeta} := (\zeta_1, \zeta_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\zeta} \,:=\, \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} \,\in\, L^2(\Omega) \right\},$$
y provisto del producto escalar
$$\langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathrm{rot};\Omega} \,:=\, \int_\Omega \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx \,+\, \int_\Omega \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\zeta}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\tau}\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\zeta},\, \boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,,$$
es un espacio de Hilbert.

GGP/ggp