UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA DE RECUPERACIÓN

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Jueves, 29 de Diciembre de 2016 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, con frontera Lipschitz-continua Γ, y sean Γ_D y Γ_N partes disjuntas de Γ tal que $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$.

   a) Sea $E_D : H^{1/2}(\Gamma_D) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ el operador definido por $E_D(\varphi) := \gamma_0(z_\varphi)$, donde $z_\varphi \in H^1(\Omega)$ es la única solución del problema

   $$\Delta z_\varphi = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \gamma_0(z_\varphi) = \varphi \quad \text{en} \quad \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(z_\varphi) = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N\,, \tag{1}$$

   y sea $E_{N,0} : H^{1/2}(\Gamma_N) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ el operador de extensión nula en Γ_D. Pruebe que E_D está bien definido (es decir que (1) está bien propuesto), que $E_D \in \mathcal{L}(H^{1/2}\big(\Gamma_D), H^{1/2}(\Gamma)\big)$, y que

   $$H^{1/2}(\Gamma) \;=\; E_D\big(H^{1/2}(\Gamma_D)\big) \;\oplus\; E_{N,0}\big(H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)\big)\,. \tag{2}$$

   Dados $f \in L^2(\Omega)$, $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ y $g_N \in H^{-1/2}_{00}(\Gamma_N)$, considere el problema de valores de contorno

   $$\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \gamma_0(u) = g_D \quad \text{en} \quad \Gamma_D\,, \quad \gamma_1(u) = g_N \quad \text{en} \quad \Gamma_N\,. \tag{3}$$

   b) Pruebe que una formulación primal-mixta de (3) se reduce a: Hallar $(u,\xi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma_D)$ tal que

   $$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,+\, \langle \xi, \gamma_0(v)|_{\Gamma_D}\rangle_{\Gamma_D} &= F(v) \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,,\\ \langle \lambda, \gamma_0(u)|_{\Gamma_D}\rangle_{\Gamma_D} &= G(\lambda) \qquad \forall\, \lambda \in H^{-1/2}(\Gamma_D)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

   donde $\langle \cdot,\cdot\rangle_{\Gamma_D}$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma_D)$ y $H^{1/2}(\Gamma_D)$, y F y G son funcionales lineales y acotados que dependen del par (f, g_N) y de g_D, respectivamente.

   c) Muestre que una formulación dual-mixta de (3) queda dada por: Hallar $(\sigma,(u,\varphi)) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times \big(L^2(\Omega) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)\big)$ tal que

   $$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\cdot\tau \,+\, \int_\Omega u\,\mathrm{div}(\tau) \,+\, \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\tau)|_{\Gamma_N}, \varphi\rangle_{\Gamma_N} &= F(\tau)\,,\\ \int_\Omega v\,\mathrm{div}(\sigma) \,+\, \langle \gamma_{\boldsymbol{\nu}}(\sigma)|_{\Gamma_N}, \psi\rangle_{\Gamma_N} &= G(v,\psi)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

   para todo $(\tau,(v,\psi)) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times \big(L^2(\Omega) \times H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)\big)$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Gamma_N}$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}_{00}(\Gamma_N)$ y $H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$, y F y G son funcionales lineales y acotados que dependen de g_D y del par (f, g_N), respectivamente.

2. Dados un entero $k \geq 0$, $p \in [1, +\infty)$, y un compacto conexo K de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^{0,1}$, el propósito de este ejercicio es probar que existe una constante $C > 0$, que depende sólo de K, tal que

$$\inf_{p \in P_k(K)} \|v - p\|_{k+1,p;K} \;\leq\; C\, |v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \,\in\, W^{k+1,p}(K)\,, \tag{6}$$

para lo cual se sugiere proceder como se indica a continuación.

   a) Sean $N := \dim P_k(K)$, $\{p_1, p_2, ..., p_N\}$ una base de $P_k(K)$, y denote por $\{f_1, f_2, ..., f_N\}$ la base canónica asociada del dual $P_k(K)'$, la cual verifica $f_j(p_i) = \delta_{ij} \;\; \forall\, i,\, j \in \{1, 2, ..., N\}$. Luego, demuestre que existe un conjunto de funcionales $\{F_1, F_2, ..., F_N\} \subseteq W^{k+1,p}(K)'$ tal que

$$P_k(K) \,\cap\, {}^{o}\{F_1, F_2, ..., F_N\} \;=\; \{0\}\,,$$

   y use problema 2 para deducir que existe una constante $C_K > 0$ tal que

$$\|v\|_{k+1,p;K} \;\leq\; C_K\; |v|_{k+1,p;K} \qquad \forall\, v \,\in\, W^{k+1,p}(K) \,\cap\, {}^{o}\{F_1, F_2, ..., F_N\}\,. \tag{7}$$

   b) Pruebe que para cada $v \in W^{k+1,p}(K)$ existe un único $q_v \in P_k(K)$ tal que $f_i(q_v) = F_i(v) \quad \forall\, i \in \{1, 2, ..., N\}$, y concluya a partir de (7) la desigualdad requerida (6).

GGP/ggp