UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2, MAT 525441

Análisis Numérico II: Algebra Lineal Numérica.

Primer Semestre de 2003. Profesor *Gabriel N. Gatica.*

1. **(1.5 Puntos)**
   Dado $m \in \mathbb{N}$, considere el espacio de matrices $V := \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ provisto del producto interior $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(A^t B) \quad \forall A, B \in V$, y denote por $\mathbf{I}$ la matriz identidad correspondiente.

   a) Demuestre que $V = U \oplus W$, donde $U := \{ A \in V : \quad \operatorname{tr}(A) = 0 \}$ y $W = \{ c\mathbf{I} : \quad c \in \mathbb{R} \}$.

   b) Encuentre los proyectores ortogonales sobre U y $U^\perp$.

2. **(1.5 Puntos)**
   Considere la matriz $\quad A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1-i & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \in \quad \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$

   a) Use reflectores de Householder para encontrar una factorización QR de A.

   b) Encuentre una matriz de Hessenberg superior, similar a A.

3. **(2.0 Puntos)**
   Sean $\varphi,\ \theta \in \mathbb{R}$ y defina la matriz $U := \begin{bmatrix} e^{i\theta}\cos\varphi & e^{i\theta}\operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \in \quad \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$

   a) Demuestre que U es unitaria.

   b) Dada $A := \begin{bmatrix} -i & -2 \\ e^{i\frac{\pi}{4}} & 3 \end{bmatrix}$, encuentre $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$ tales que $U^* A$ sea triangular superior.

   c) Encuentre las formulas que transforman una matriz **hermitiana** arbitraria $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ en la matriz similar $U^* A\, U$. Deduzca los valores de φ y θ que hacen que $U^* A\, U$ sea diagonal.

4. **(1.0 Puntos)**
   El algoritmo QR para el cálculo de los valores propios de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ define primero $A_0 := A$ y luego construye la sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ como $A_k := R_k\, Q_k + \mu_k\, \mathbf{I}$, donde $\mu_k := a_{mm}^{(k-1)}$, y Q_k, R_k son matrices unitaria y triangular superior, respectivamente, tales que $A_{k-1} = Q_k\, R_k + \mu_k\, \mathbf{I}$. Demuestre que cada matriz A_k tiene los mismos valores propios de A.