UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1, MAT 525441

Análisis Numérico II: Algebra Lineal Numérica.

Primer Semestre de 2003. Profesor *Gabriel N. Gatica.*

1. **(0.5 Puntos)**
Dada $A = \begin{bmatrix} 1+i & -1 & 2 \\ 2-3i & 0 & 3-i \end{bmatrix}$, calcule A^*, $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A^*\|_\infty$ y $\|A^*\|_1$.

2. **(1.0 Puntos)**
Sea $S \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ una matriz *anti–hermitiana*, es decir tal que $S^* = -S$.

   a) Pruebe que la parte real de cada valor propio de S es nula.

   b) Pruebe que la matriz $Q = (I-S)^{-1}(I+S)$, conocida como la *Transformación de Cayley de S*, es unitaria.

3. **(1.5 Puntos)**

   a) Sean U, $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tales que U es unitaria y

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

   Defina la matriz $A := UDU^*$ y demuestre que $\lambda_1 = 1$ es el único valor propio no nulo de A. Además, pruebe que $A = \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}^*$, donde $\hat{\mathbf{u}}$ es la primera columna de U.

   b) Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^n$, tales que $\|\hat{\mathbf{u}}\|_2 = \|\hat{\mathbf{v}}\|_2 = 1$, y defina la matriz $A := \alpha\,\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}^*$. Aplique *a*) para demostrar que $\sigma_1 := \sqrt{|\alpha|^2}$ es el único valor singular no nulo de A.

   c) Aplique *b*) para encontrar todos los valores singulares de la matriz

$$A = (1+i)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Además, calcule $\|A\|_2$ y $\|A\|_F$.

4. **(1.5 Puntos)**

   a) Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $Q \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{C})$, con $p \geq m$, tales que las m columnas de Q son ortonormales. Pruebe que $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ y $\|QA\|_F = \|A\|_F$.

   b) Sean A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y suponga que existen $U \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$, $V \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, unitarias, tales que $A = UBV^*$. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|^2 .$$

5. **(1.5 Puntos)**
   Encuentre una descomposición de valores singulares de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) .$$