UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EXAMEN

Teoría de Elementos Finitos (408634).

Enero 5, 2004 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Dados un espacio de Hilbert H, una forma bilineal $A : H \times H \to \mathbf{R}$ acotada y H-elíptica y $F \in H'$, considere el problema variacional: Hallar $u \in H$ tal que $A(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H$. Además, sea $\{H_h\}_{h>0}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H, y para cada $h > 0$ defina una forma bilineal acotada $A_h : H_h \times H_h \to \mathbf{R}$, un funcional $F_h \in H_h'$, y el esquema de Galerkin asociado: Hallar $u_h \in H_h$ tal que $A_h(u_h, v_h) = F_h(v_h) \quad \forall\, v_h \in H_h$. Suponga que las formas bilineales A_h son uniformemente H_h-elípticas, es decir existe $\alpha > 0$ tal que $A_h(v,v) \,\geq\, \alpha\, \|v\|_H^2 \quad \forall\, v \in H_h, \quad \forall\, h > 0$, y demuestre que existe una constante $C > 0$, independiente de h, tal que

$$||u - u_h||_H \,\leq\, C \Bigg\{ \inf_{v_h \in H_h} \left(||u - v_h||_H + \sup_{\substack{w_h \in H_h \\ w_h \neq 0}} \frac{|\, A(v_h, w_h) - A_h(v_h, w_h)\,|}{||w_h||_H} \right)$$

$$+ \sup_{\substack{w_h \in H_h \\ w_h \neq 0}} \left(\frac{F(w_h) - F_h(w_h)}{||w_h||_H} \right) \Bigg\}.$$

2. Sean $\hat{K} = [0,1]$, $K = [x_{j-1}, x_j]$, $h_j := x_j - x_{j-1} > 0$, y considere la aplicación afín $F : \hat{K} \to K$ definida por $F(\hat{x}) = h_j\, \hat{x} + x_{j-1} \quad \forall\, \hat{x} \in \hat{K}$.

   (a) Dado un entero $r \geq 0$, demuestre que $v \in H^r(K)$ sí y sólo sí $\hat{v} := v \circ F \in H^r(\hat{K})$, y en tal caso pruebe que

   $$|\hat{v}|_{H^r(\hat{K})} \;=\; h_j^{r-1/2}\; |v|_{H^r(K)}\,.$$

   (b) Sean m, k enteros tal que $0 \leq m \leq k+1$, y sea $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), H^m(\hat{K}))$ tal que $\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall\, \hat{p} \in \mathbf{P}_k$, donde $\mathbf{P}_k$ es el espacio de polinomios de grado $\leq k$. Además, sea Π el operador definido por $\Pi v = (\hat{\Pi}\hat{v}) \circ F^{-1} \quad \forall\, v \in H^{k+1}(K)$. Demuestre que existe $C > 0$, que depende sólo de $\hat{K}$ y $\hat{\Pi}$, tal que

   $$\|v - \Pi v\|_{H^m(K)} \;\leq\; C\; h_j^{k+1-m}\; |v|_{H^{k+1}(K)}\,.$$

3. (a) Determine las coordenadas baricéntricas del 3-simplex (tetraedro) K de $\mathbf{R}^3$ determinado por los vértices $(0,0,0)$, $(1/2,0,0)$, $(0,1/2,0)$ y $(0,0,1/2)$.

   (b) Calcule las funciones base del cubo unitario K de tipo 1 en $\mathbf{R}^3$.

4. Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ una partición del intervalo $\Omega := (a, b)$. Sea H_n un espacio de funciones definidas sobre Ω y para cada $i \in \{1, ..., n+1\}$ denote por $H_{n,i}$ el espacio de restricciones de H_n al subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

   (a) Demuestre que si $H_n \subseteq C(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^1(x_{i-1}, x_i)$ $\forall\, i \in \{1, ..., n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^1(\Omega)$.

   (b) Demuestre que si $H_n \subseteq C^1(\bar{\Omega})$ y $H_{n,i} \subseteq H^2(x_{i-1}, x_i)$ $\forall\, i \in \{1, ..., n+1\}$, entonces $H_n \subseteq H^2(\Omega)$.

5. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $f \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $u \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div}; \Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \,\mathrm{tr}\, \mathbf{e}(u)\, I_2 + 2\mu\, \mathbf{e}(u) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma} = -f \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, I_2 es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(u) := \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^{\mathbf{T}}\right)$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que $\mathbf{e}(u)$ puede re-escribirse como

$$\mathbf{e}(u) = \nabla u \,-\, \gamma \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

donde $\gamma := \frac{1}{2}\left(\nabla u - (\nabla u)^{\mathbf{T}}\right)$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio $\mathcal{R} := \{\, \eta \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \eta + \eta^{\mathbf{T}} = 0 \,\}$.

   (a) Demuestre que una formulación variacional **mixta** de este problema se reduce a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, (u, \gamma)) \in H \times Q$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (u, \gamma)) &= \quad 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (v, \eta)) &= \quad -\int_\Omega f \cdot v\, dx \quad \forall\, (v, \eta) \in Q\,, \end{aligned}$$

   donde $H := H(\mathrm{div}; \Omega)$, $Q := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$, $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{2\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \int_\Omega \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\, \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in H\,,$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, (v, \eta)) := \int_\Omega v \cdot \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \eta\, dx \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, (v, \eta)) \in H \times Q\,.$$

   (b) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.