UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EXAMEN DE REPETICION

Análisis Funcional I (522401)

Viernes 28 de Julio de 2000 *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (20 Puntos). Sea $(V, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de Hilbert y sea $J : V \to \mathbf{R}$ un funcional nolineal. Se dice que J admite una derivada direccional en $v \in V$, en la dirección $\varphi \in V$, si la expresión $\frac{J(v+\epsilon\varphi)-J(v)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $DJ(v,\varphi)$. Entonces, J se dice diferenciable en el sentido de **Gateaux** (o G-diferenciable) en $v \in V$, si $DJ(v,\varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$. Ahora, si J es G-diferenciable en $v \in V$ y si $DJ(v,\cdot) \in V'$, se concluye, por el Teorema de Representación de Riesz, que existe un único elemento $z \in V$ tal que $DJ(v,\varphi) =< z, \varphi > \forall\, \varphi \in V$. En tal caso, se denota $z := J'(v)$ y se llama el **gradiente** de J en v.

Se dice que J tiene segunda diferencial en el sentido de Gateaux en $v \in V$, en las direcciones φ y $\psi \in V$, si la expresión $\frac{DJ(v+\epsilon\psi,\varphi) - DJ(v,\varphi)}{\epsilon}$ admite un límite cuando $\epsilon \to 0$. El valor de este límite se denota $D^2J(v,\varphi,\psi)$.

a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ y considere $V := L^2(\Omega)$. Defina $J_0 : V \to \mathbf{R}$ por

$$J_0(v) := \int_\Omega (v^2 + v)\, dx \quad \forall\, v \in V$$

y calcule $J_0'(v)$ para todo $v \in V$.

b) Suponga que J es G-diferenciable en $(v + \alpha\varphi)$, en la dirección φ, para todo $\alpha \in [0,1]$. Demuestre que existe $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \,=\, J(v) \,+\, DJ(v+\beta\,\varphi,\varphi)\,.$$

c) Suponga que J es G-diferenciable en $v \in V$ y que, dada una dirección $\varphi \in V$, $D^2J(v+\alpha\varphi,\varphi,\varphi)$ existe $\forall\, \alpha \in [0,1]$. Demuestre que hay una constante $\beta \in (0,1)$ tal que

$$J(v+\varphi) \,=\, J(v) + DJ(v,\varphi) + \frac{1}{2}\, D^2J(v+\beta\varphi,\varphi,\varphi)\,.$$

Problema 2 (20 Puntos). Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X'$ un operador **nolineal**. Se dice que T satisface la propiedad (S) si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subseteq X$ tal que

$$x_n \stackrel{w}{\longrightarrow} x \quad \text{y} \quad (T(x_n))\,(x_n - x) \,-\, (T(x))\,(x_n - x) \longrightarrow 0\,,$$

se tiene $x_n \longrightarrow x$.
Sean H, Q, V espacios de Banach tales que $H \subseteq V$ y $\mathbf{i} : H \to V$ es compacta. Sea $X := H \times Q$, y considere una forma bilineal acotada $B : X \times X \to \mathbf{R}$ y un operador nolineal $A : H \to H'$ que satisfacen las siguientes propiedades

i) existe $C_0 > 0$ tal que

$$B((u,\lambda),(u,\lambda)) \;\geq\; C_0\,||\lambda|_Q^2 \quad \forall\,(u,\lambda) \in X\,.$$

ii) existen C_1, $C_2 > 0$ tal que para todo $u, v \in H$

$$(A(u))\,(u-v) \,-\, (A(v))\,(u-v) \;\geq\; C_1\,||u-v||_H^2 \,+\, R(u,v)\,,$$

donde

$$|R(u,v)| \;\leq\; C_2\,\{\,1 \,+\, ||u||_H \,+\, ||v||_H\,\}\,||u-v||_V\,.$$

Demuestre que el operador nolineal $T : X \to X'$ definido por

$$(T(u,\lambda))\,(v,\mu) \;:=\; (A(u))\,(v) \,+\, B((u,\lambda),(v,\mu))\,,$$

satisface la propiedad (S).

Problema 3 (20 Puntos). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera suave Γ, y defina el espacio $V := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir

$$V \;=\; \left\{\, v \in H^2(\Omega) : \quad v \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \,\right\}.$$

Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$||v||_{H^1(\Omega)} \;\leq\; C\,||\Delta\, v||_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in V\,.$$

Concluya que la norma y la semi-norma de $H^2(\Omega)$ son equivalentes en V.

Problema 4 (20 Puntos). Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}^2$ con frontera suficientemente suave. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ también es compacta.

Problema 5 (20 Puntos). Un espacio de Banach X se dice **separable** si posee un subconjunto denso y numerable. Puede probarse que todo subespacio de un Banach separable, también es separable.

a) Sean X, Y espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable.

b) Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(T) = \{0\}$ y $R(T) = Y$. Demuestre que X es separable si y sólo si Y es separable.

c) Sea $T : H^m(\Omega) \to [L^2(\Omega)]^{m+1}$ definido por $T(v) := (v, v^{(1)}, \ldots, v^{(m)})$ para todo $v \in H^m(\Omega)$. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado.

d) Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}$ y sea $m \in \mathbf{N}$. Asuma que $L^2(\Omega)$ es separable y demuestre que el espacio de Sobolev $H^m(\Omega)$ también lo es.

Ind. (para d)): Aplique partes **a), b) y c)**.