UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EXAMEN (elija 120 Pts.) y PRUEBA 2 (1,3,5,6,7)
Análisis Funcional I (522401)

Miércoles 8 de Agosto de 2001 *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (40 Pts.) Sea $\Omega = (0,1)$ y $X = L^2(\Omega)$. Puede probarse que X provisto del producto escalar

$$< f, g > := \int_{\Omega} f(t)\, g(t)\, dt \quad \forall\, f,\, g \,\in\, X$$

es un espacio de Hilbert, y que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $(X, < \cdot, \cdot >)$.

a) Considere la sucesión $\{ x_n \}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq X$ definida por $x_n(t) = \sqrt{2}\, sin(n\pi t)$ $\forall\, t \in \Omega$. Demuestre que

$$||x_n|| \,=\, 1 \quad \forall\, n \,\in\, \mathbf{N} \quad , \quad \text{y que} \quad \lim_{n\to\infty} F(x_n) \,=\, 0 \quad \forall\, F \,\in\, X'\,.$$

b) Dadas las funciones exponenciales $p_j,\, q_j \,\in\, X$, $j \,\in\, \{1, ..., n\}$, con $p_j(t) = \exp\,(-j\, t)$ y $q_j(t) = \exp\,(-j\, t^2)$, $\forall\, t \in [0, 1]$, se define el operador $K : X \to X$ como

$$K(u) := \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} q_j \;+\; \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} p_j \quad \forall\, u \in X\,.$$

Pruebe que $K \in \mathcal{L}(X, X)$, encuentre explícitamente el operador adjunto $K^* : X \to X$, y demuestre que K^* es compacto.

Problema 2. (20 Pts.) Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $\bar{\Omega} := [0, 1]$ provisto de la norma uniforme. Dados $u_1,\, u_2,\, y \,\in\, X$, considere la ecuación integral: *Hallar* $u \,\in\, X$ *tal que*

$$u(t) \;-\; \int_0^1 u_1(t)\, s^2\, u(s)\, ds \;-\; \int_0^1 u_2(t)\, (1 - \frac{3}{2} s)\, u(s)\, ds \;=\; y(t) \quad \forall\, t \,\in\, \bar{\Omega}\,. \qquad (1)$$

i) Si $u_1(t) \;=\; 4t$ y $u_2(t) \;=\; 1$ $\forall t \,\in\, \Omega$, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (1) tenga al menos una solución.

ii) Pruebe que si $u_1(t) \,=\, t$ y $u_2(t) \,=\, 1$, entonces para cada $y \,\in\, X$ la ecuación integral (1) tiene una única solución.

Problema 3 (20 Pts.) Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) := \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \mathrm{rot}\, v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \,\}$$

provisto del producto escalar

$$< v, w >_{H(\mathrm{rot};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \ \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega); < \cdot, \cdot >_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.
b) Pruebe que para todo $g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ existe un único $v_g \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v_g \ \mathrm{rot}\, w \, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}\, g \, \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

Ind.: Dada $v \in [L^2(\Omega)]^2$, se dice que $\mathrm{rot}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si: $-\int_\Omega v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx + \int_\Omega v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx = \int_\Omega z \, \varphi \, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$

Problema 4. (20 Pts.) Sea X un espacio vectorial normado de dimensión **infinita** y sea $K \in K(X, X)$ un operador inyectivo. Demuestre que $K^{-1} \notin \mathcal{L}(X, X)$.

Problema 5. (20 Pts.)

a) Sea M un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado X. Pruebe que $\left(\frac{X}{M}\right)'$ es isomorfo a M^o.

b) Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{L}(X, X)$ tal que la forma bilineal inducida por $A^* A$ es X-elíptica. Demuestre que $R(A)$ es cerrado en X.

Problema 6. (20 Pts.) Sean X e Y espacios de Banach, y sea $A : X \to Y$ un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ e imagen $R(A)$. Demuestre que son equivalentes:

a) El operador A es inyectivo, y A^{-1} es acotado sobre $R(A)$.

b) Existe una constante positiva C tal que $||Ax|| \geq C||x||$ para todo $x \in D(A)$.

c) $R(A)$ es cerrado en Y, y A es inyectivo.

Problema 7. **(20 Pts.)** Sea M un subespacio cerrado de un Hilbert H. Por el Teorema de Proyección, cada $x \in H$ puede escribirse únicamente en la forma $x = y + z$, con $y \in M \quad \text{y} \quad z \in M^{\perp}$. El punto $y \in M$ se llama la **proyección** de x en M, y el operador $P : X \to M, \quad Px = y$, se llama la proyección sobre M. También se denota $P := P_M$, y se dice que P es una proyección.

i) Pruebe que si P es una proyección, entonces P es autoadjunto, $P^2 = P$, y $||P|| = 1 \quad \text{si} \quad P \neq 0$.

ii) Pruebe que si $P \in \mathcal{L}(H, H)$ es autoadjunto y $P^2 = P$, entonces P es una proyección sobre algún subespacio cerrado de H.