UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EXAMEN

Análisis Funcional I (522401)

Viernes 14 de Julio de 2000 *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (20 Puntos). Sea $\Omega = (0,1)$ y $X = L^2(\Omega)$. Puede probarse que X provisto del producto escalar

$$< f, g > := \int_\Omega f(t)\, g(t)\, dt \quad \forall\, f,\, g \,\in\, X$$

es un espacio de Hilbert, y que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $(X, < \cdot, \cdot >)$. Considere la sucesión $\{\, x_n \,\}_{n\in \mathbf{N}} \subseteq X$ definida por $x_n(t) = \sqrt{2}\, sin(n\pi t)\ \forall\, t \in \Omega$. Demuestre que

$$||x_n|| = 1 \quad \forall\, n \,\in\, \mathbf{N} \quad , \quad \text{y que} \quad \lim_{n\to\infty} < \varphi, x_n > = 0 \quad \forall\, \varphi \,\in\, C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Concluya además que $x_n \stackrel{w}{\longrightarrow} 0$, y que x_n **no converge fuertemente** a la función nula.

Problema 2 (20 Puntos). Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\text{rot};\Omega) \,:=\, \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \,: \quad \text{rot}\, v \,:=\, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \,-\, \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \,\in\, L^2(\Omega)\,\}$$

provisto del producto escalar

$$< v, w >_{H(\text{rot};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w\, dx \,+\, \int_\Omega \text{rot}\, v \ \text{rot}\, w\, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\text{rot};\Omega)\,.$$

a) Demuestre que $(H(\text{rot};\Omega); < \cdot, \cdot >_{H(\text{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.
b) Pruebe que para todo $g \in H(\text{rot};\Omega)$ existe un único $v_g \in H(\text{rot};\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_g \cdot w\, dx \,+\, \int_\Omega \text{rot}\, v_g \ \text{rot}\, w\, dx \,=\, \int_\Omega \text{rot}\, g\, \text{rot}\, w\, dx \quad \forall\, w \in H(\text{rot};\Omega)\,.$$

Ind.: Notar que $v \in H(\text{rot};\Omega)$ sí y sólo sí $(v_2, -v_1) \in H(\text{div};\Omega)$. También, dada $v \in [L^2(\Omega)]^2$, se dice que $\text{rot}\, v := z \in L^2(\Omega)$ si: $-\int_\Omega v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx + \int_\Omega v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx = \int_\Omega z\, \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$

Problema 3 (20 Puntos). Sea $\Omega := (a, b)$ un intervalo acotado de $\mathbf{R}$ y dado $m \in \mathbf{N}$ considere el espacio de Sobolev $H^m(\Omega) := \{\, v \in L^2(\Omega) : \quad v^{(j)} \in L^2(\Omega) \quad \forall j \in \{1, ..., m\}\,\}$. Asuma que la inyección $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i : H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta.

Problema 4 (20 Puntos). Sean $(X, < \cdot, \cdot >_X)$, $(Y, < \cdot, \cdot >_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} : X \to X$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es $< \mathbf{S}(y), y >_Y \ \geq \ 0 \quad \forall\, y \in Y$, que $\mathbf{P}$ es **nolineal**, y que existen constantes M, α, $\beta > 0$ tales que

$$||\mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}||_X \ \leq \ M\,||x - \bar{x}||_X \quad , \quad < \mathbf{P}x - \mathbf{P}\bar{x}, x - \bar{x} >_X \ \geq \ \alpha\,||x - \bar{x}||_X^2 \quad \forall\, x,\, \bar{x} \in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{< \mathbf{Q}(x), y >_Y}{||x||_X} \ \geq \ \beta\,||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

También, pruebe que existe una constante $C > 0$, que depende de M, α, β y $||\mathbf{Q}||$, tal que

$$||\tilde{x}|| + ||\tilde{y}|| \ \leq \ C\ \{\, ||f|| + ||g|| + ||\mathbf{P}(0)||\,\}\,.$$

Problema 5 (20 Puntos). Un espacio de Banach X se dice **separable** si posee un subconjunto denso y numerable. Puede probarse que todo subespacio de un Banach separable, también es separable.

a) Sean X, Y espacios de Banach separables. Demuestre que el espacio producto $X \times Y$ también es separable.

b) Sean X, Y espacios de Banach y suponga que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $N(T) = \{\,0\,\}$ y $R(T) = Y$. Demuestre que X es separable si y sólo si Y es separable.

c) Sea $T : H^m(\Omega) \to [L^2(\Omega)]^{m+1}$ definido por $T(v) := (v, v^{(1)}, \ldots, v^{(m)})$ para todo $v \in H^m(\Omega)$. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado.

d) Sea Ω un abierto de $\mathbf{R}$ y sea $m \in \mathbf{N}$. Asuma que $L^2(\Omega)$ es separable y demuestre que el espacio de Sobolev $H^m(\Omega)$ también lo es.

Ind. (para d)): Aplique partes **a), b) y c)**.

Problema 6 (20 Puntos). Sea X el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dadas las funciones exponenciales $p_j,\, q_j \in X$, $j \in \{0,1,...,n\}$, con $p_j(t) = \exp(-j\,t)$ y $q_j(t) = \exp(-j\,t^2)$, $\forall\, t \in [0,1]$, se define el operador $K : X \to X$ como

$$K(u) := \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, p_j(t)\, dt \right\} p_j \; + \sum_{j=0}^{n} \left\{ \int_0^1 u(t)\, q_j(t)\, dt \right\} q_j \qquad \forall\, u \in X\,.$$

Pruebe que $K \in \mathcal{L}(X,X)$, encuentre explícitamente el operador adjunto $K' : X' \to X'$, y demuestre que K' es compacto.