UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EXAMEN

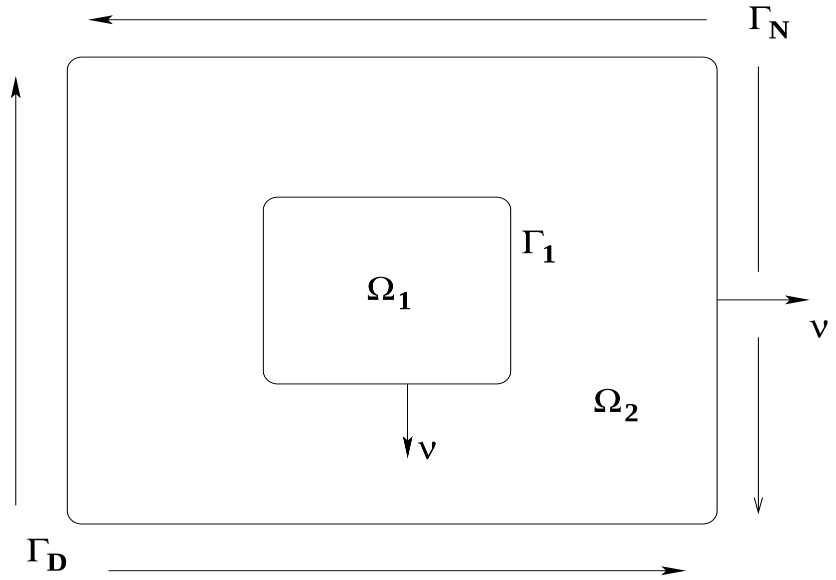
Tópicos de Elementos Finitos II (408.639)

Sábado 20 de Enero de 2001 *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (60 Puntos) (Un problema de transmisión).
Sea Ω_1 un dominio acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ_1, y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ_1 y por una curva cerrada Γ_2 cuyo interior contiene completamente a $\overline{\Omega}_1$. Además, sean Γ_D y Γ_N dos partes disjuntas de Γ_2 tales que $\Gamma_2 = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$ (ver figura). Entonces, dados $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $\tilde{g}_1 \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ y $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, interesa el siguiente problema: Hallar $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tales que

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f_1 \quad \text{en} \quad \Omega_1\,, \\ u_1 - u_2 = g_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} &= \tilde{g}_1 \quad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \\ -\Delta u_2 &= f_2 \quad \text{en} \quad \Omega_2\,, \\ u_2 = g_D \quad \text{en} \quad \Gamma_D \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N\,, \end{aligned} \tag{P}$$

donde ν es la normal unitaria exterior a Ω_1 y Ω_2 en Γ_1 y Γ_2, respectivamente.



a) Demuestre que una formulación variacional mixta de (P) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega_1) \times H_{\Gamma_N}(\mathrm{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\xi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, tales que

$$\sum_{i=1}^{2} \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma_i \cdot \tau_i \, dx + \int_{\Omega_i} u_i \,\mathrm{div}\, \tau_i \, dx \right\} + \int_{\Gamma_1} \xi (\tau_1 \cdot \nu - \tau_2 \cdot \nu) \, ds = F(\boldsymbol{\tau}) \,,$$

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} v_i \,\mathrm{div}\, \sigma_i \, dx + \int_{\Gamma_1} \lambda (\sigma_1 \cdot \nu - \sigma_2 \cdot \nu) \, ds = G(\mathbf{v}, \lambda) \,,$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \tau_2) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega_1) \times H_{\Gamma_N}(\mathrm{div}\,;\Omega_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ y $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$H_{\Gamma_N}(\mathrm{div}\,;\Omega_2) := \{ \tau_2 \in H(\mathrm{div}\,;\Omega_2) : \quad \tau_2 \cdot \nu = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_N \} \,,$$

$$F(\boldsymbol{\tau}) := \int_{\Gamma_1} g_1 \, \tau_1 \cdot \nu \, ds \; + \int_{\Gamma_D} g_D \, \tau_2 \cdot \nu \, ds \,,$$

y

$$G(\mathbf{v}, \lambda) := - \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f_i \, v_i \, dx \; + \int_{\Gamma_1} \lambda \, \tilde{g}_1 \, ds \,.$$

b) Pruebe que la formulación anterior posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \xi)$ en los espacios indicados.

c) Considere una triangulación del dominio $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, defina un esquema de Galerkin apropiado, y deduzca un **estimador de error a-posteriori** basado en la solución de problemas locales.

Problema 2 (40 Puntos) (Un problema de criterio).
Enuncie y demuestre, con todos los detalles posibles, un teorema o algún resultado relevante extraído del tópico que le correspondió exponer. En la evaluación respectiva se considerarán, principalmente, los siguientes aspectos: **grado de complejidad, precisión y certeza en su redacción, importancia del resultado, y orden de su presentación**.