UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EXAMEN

Teoría de Elementos Finitos (408.634)

Viernes 28 de Julio de 2000 *Prof. Gabriel N. Gatica*

Problema 1 (20 Puntos). Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, y defina el espacio

$$H(\mathrm{rot};\Omega) := \{\, v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que } \mathrm{rot}\, v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \,\},$$

provisto del producto escalar

$$< v, w >_{H(\mathrm{rot};\Omega)} := \int_\Omega v \cdot w \, dx + \int_\Omega \mathrm{rot}\, v \ \mathrm{rot}\, w \, dx \quad \forall\, v,\, w \in H(\mathrm{rot};\Omega)\,.$$

Demuestre que $(H(\mathrm{rot};\Omega); < \cdot, \cdot >_{H(\mathrm{rot};\Omega)})$ es un espacio de Hilbert. Además, pruebe que existe un operador lineal y continuo $\gamma : H(\mathrm{rot};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) = u \cdot \tau \ \forall\, u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector **tangencial** unitario de Γ.

Problema 2 (20 Puntos). Sean $(X, < \cdot, \cdot >_X)$, $(Y, < \cdot, \cdot >_Y)$ espacios de Hilbert y considere operadores $\mathbf{P} \in \mathcal{L}(X, X)$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(Y, Y)$. Suponga que $\mathbf{S}$ es semi-definido positivo, esto es $< \mathbf{S}(y), y >_Y \geq 0 \quad \forall\, y \in Y$, y que existen constantes α, $\beta > 0$ tales que

$$< \mathbf{P}x, x >_X \geq \alpha \, ||x||_X^2 \quad \forall\, x \in X\,,$$

y

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{< \mathbf{Q}(x), y >_Y}{||x||_X} \geq \beta \, ||y||_Y \quad \forall\, y \in Y\,.$$

a) Dados $f \in X$ y $g \in Y$, demuestre que existe un único par $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

b) Sea $X_h \times Y_h$ un subespacio de dimensión finita de $X \times Y$. Defina explícitamente el esquema de Galerkin asociado y demuestre que se satisface la estimacion de Céa correspondiente.

Problema 3 (20 Puntos). Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina

$$V := \left\{ v \in H^2(\Omega) : \quad \int_\Omega v\, p\, dx = 0 \quad \forall\, p \in \mathbf{P}_1(\Omega) \right\},$$

donde $\mathbf{P}_1(\Omega)$ es el espacio de polinomios de grado ≤ 1 definidos sobre Ω. Demuestre que la norma $||\cdot||_{H^2(\Omega)}$ y la seminorma $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$ son equivalentes en V.

Problema 4 (Lema de Aubin-Nitsche) (20 Puntos). Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ espacios de Hilbert tal que $V \subseteq H$ y la inclusión canónica $\mathbf{i} : V \to H$ es continua. Sea $A : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica, y considere el operador $\mathbf{P} : H \to V$, donde para todo $g \in H$, $\mathbf{P}(g)$ es el único elemento en V que satisface

$$A(v, \mathbf{P}(g)) = \langle g, v\rangle_H \quad \forall\, v \in V.$$

Dados $F \in V'$ y V_h un subespacio de dimensión finita de V, denote por $u \in V$ y $u_h \in V_h$ las únicas soluciones de los esquemas continuo y de Galerkin, respectivamente, esto es

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall\, v \in V,$$

y

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h.$$

a) Demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$||u - u_h||_H \leq C\, ||u - u_h||_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{v_h \in V_h} ||\mathbf{P}(g) - v_h||_V \right\}.$$

b) En particular, dado un convexo poligonal acotado $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, considere la solución de elementos finitos (obtenida mediante una triangulación regular hecha de triángulos de tipo (1)) para la ecuación de Poisson con dato $f \in L^2(\Omega)$ y condiciones de Dirichlet homogéneas. **Aplique** directamente **a)** para concluir que $||u - u_h||_{L^2(\Omega)} = O(h^2)$.

Problema 5 (30 Puntos) (Para entregar mañana sábado a las 18.00 hrs.) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. Dada $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, nos interesa el siguiente problema de elasticidad lineal: *Hallar el desplazamiento* $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ *y el tensor de esfuerzos* $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{e}(\mathbf{u})\, \mathbf{I}_2 + 2\mu\, \mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,,$$

donde λ, $\mu > 0$ son las constantes de Lamé, $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{e}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\,(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es el tensor de deformaciones. Es fácil verificar que el tensor de deformaciones puede re-escribirse como

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{8}$$

donde $\boldsymbol{\gamma} := \frac{1}{2}\,(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^{\mathbf{T}})$ es una nueva incógnita (llamada rotación) que vive en el espacio $\mathcal{R} := \{\, \boldsymbol{\eta} \in [L^2(\Omega)]^{2\times 2} : \quad \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{T}} = 0\,\}$. Además, puede demostrarse que una formulación variacional **mixta** de este problema se reduce a: *Hallar* $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ *tal que*

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})) \;&=\; 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})) \;&=\; -\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx \quad \forall\, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbf{Q}\,, \end{aligned} \tag{P}$$

donde $\mathbf{H} := \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$, $\mathbf{Q} := [L^2(\Omega)]^2 \times \mathcal{R}$, y $a : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbf{R}$, $b : \mathbf{H} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ son las formas bilineales definidas por:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{1}{2\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\, dx - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \int_\Omega \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau})\, dx \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}\,,$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})) := \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta}\, dx \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}\,.$$

a) Demuestre que a y b satisfacen las hipótesis de la teoría de Babuska-Brezzi.

b) Aplique el mismo esquema descrito en el Problema 5 (parte b)) de la Prueba 2, y deduzca un **estimador de error a-posteriori**, basado también en la solución de problemas locales, para la formulación (P).