UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EXAMEN 408.607
Ecuaciones Diferenciales Parciales

22 de Enero de 2002
Prof. Gabriel N. Gatica

Problema 1 (20 Pts.)
Suponga las regularidades necesarias para los datos involucrados, y deduzca una formula explícita para la solución del problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + h u &= f \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^n \times (0,+\infty)\,, \\ u &= g \quad \text{en} \quad \mathbf{R}^n \times \{t=0\}\,, \end{aligned}$$

donce h es una función continua que depende sólo de $t \in [0,+\infty)$.

Problema 2 (Desigualdad de Poincaré generalizada) (30 Pts.)

a) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, y sea $m \in \mathbf{N}$. Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de funcionales lineales y acotados sobre $H^m(\Omega)$, tal que la siguiente propiedad se cumple:

$$\Big(v \text{ polinomio de grado} \leq m-1 \quad \text{y} \quad F(v) = 0 \quad \forall\, F \in \mathcal{F} \Big) \quad \Rightarrow \quad v \equiv 0\,.$$

Pruebe que la aplicación $\|\cdot\|_{\mathcal{F}} : H^m(\Omega) \to \mathbf{R}$, definida por

$$\|v\|_{\mathcal{F}} := \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{F\in\mathcal{F}} |F(v)|^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall\, v \in H^m(\Omega)\,,$$

es una norma equivalente a la norma usual de $H^m(\Omega)$.

b) Demuestre que la norma y la semi-norma de $H^1(\Omega)$ son equivalentes en el espacio

$$V := \big\{ v \in H^1(\Omega) : \quad v = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_0 \big\}\,,$$

donde Γ_0 es una parte de Γ tal que $|\Gamma_0| > 0$.

c) Demuestre que la norma y la semi-norma de $H^2(\Omega)$ son equivalentes en el espacio

$$V := \left\{ v \in H^2(\Omega) : \quad \int_\Omega v\,dx = \int_\Omega x_1\, v\,dx = \int_\Omega x_2\, v\,dx = 0 \right\}.$$

Problema 3 (20 Pts.)
Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1. Utilice los teoremas de Sobolev correspondientes para deducir todas las inclusiones posibles entre los siguientes espacios:

$$L^6(\Omega),\ W^{1,3}(\Omega),\ W^{2,3}(\Omega),\ H^2(\Omega),\ C^{0,1/3}(\bar{\Omega}),\ C(\bar{\Omega}),\ L^4(\Omega),\ C^{0,0.7}(\bar{\Omega}),\ \text{y}\ H^1(\Omega),$$

tanto en $\mathbf{R}^2$ como en $\mathbf{R}^3$. Indique además qué inclusiones son compactas.

Problema 4 (Regularidad interior del problema de Neumann) (40 Pts.)
Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^n$ con frontera Lipschitz-continua Γ, y sea ν el vector normal unitario exterior a Γ. Dados $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ y una constante $\kappa > 0$, considere el problema de valores de contorno:

$$-\Delta u + \kappa u = f \quad \text{en} \quad \Omega \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{en} \quad \Gamma . \tag{1}$$

a) Demuestre que (1) tiene una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$, y pruebe que existe $C > 0$, independiente de u, tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right\} .$$

b) Siga la demostración general dada en clases, simplificando y particularizando todo lo que sea posible, para demostrar que $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ y que existe $\tilde{C} > 0$, independiente de u, tal que para todo abierto $V \subset\subset \Omega$ se tiene

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq \tilde{C} \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right\} .$$

c) Concluya que u satisface la ecuación (1) en el sentido clásico, en todos los puntos de Ω excepto en un conjunto de medida nula.