UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2

Métodos de Elementos Finitos Mixtos (525539).

Sábado, 22 de Diciembre de 2012 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (1 Punto) Establezca fundadamente la veracidad o no de las siguientes afirmaciones:

   i) En una formulación mixta típica con formas bilineales a y b, la elipticidad de a en el kernel discreto V_h de b es consecuencia de la elipticidad de a en el kernel continuo V de b, sólo cuando $V_h \subseteq V$.

   ii) El operador de interpolación de Raviart-Thomas $\Pi_h^k : H(\mathrm{div};\Omega) \cap Z \to H_h^k$ es acotado si ambos espacios se proveen de la norma $\|\cdot\|_{div;\Omega}$.

2. (1.5 Puntos) Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, donde Ω es un dominio poligonal de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ y vector normal $\boldsymbol{\nu}$, el esquema de Galerkin para la formulación mixta del problema de Poisson respectivo con condiciones de contorno de Neumann, se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, (u_h, \xi_h)) \in H_h \times (Q_h^u \times Q_h^\xi)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_h + \int_\Omega u_h \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}_h + \langle \boldsymbol{\tau}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, \xi_h \rangle_\Gamma &= 0\,, \\ \int_\Omega v_h \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}_h + \langle \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\nu}, \lambda_h \rangle_\Gamma &= -\int_\Omega f v_h + \langle g, \lambda_h \rangle_\Gamma\,, \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}_h, (v_h, \lambda_h)) \in H_h \times (Q_h^u \times Q_h^\xi)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ es la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$, y H_h, Q_h^u y Q_h^ξ son subespacios de elementos finitos de $H(\mathrm{div};\Omega)$, $L_0^2(\Omega)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente. En particular, dada una triangularización $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$ y un entero $k \geq 0$, defina

$$H_h := \left\{ \boldsymbol{\tau}_h \in H(\mathrm{div};\Omega) : \quad \boldsymbol{\tau}_h|_K \in \mathrm{RT}_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$Q_h^u := \left\{ v_h \in L_0^2(\Omega) : \quad v_h|_K \in P_k(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$\Phi_h := \left\{ \boldsymbol{\tau}_h \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Gamma : \quad \boldsymbol{\tau}_h \in H_h \right\},$$

y suponga que existen constantes $\widetilde{c}$, $\widetilde{\beta} > 0$, independientes de h, y un operador lineal $\mathcal{L}_h : \Phi_h \to H_h$, tales que $\|\mathcal{L}_h(\phi_h)\|_{\mathrm{div};\Omega} \leq \widetilde{c}\, \|\phi_h\|_{-1/2,\Gamma} \quad \forall\, \phi_h \in \Phi_h$, $\mathrm{div}\, \mathcal{L}_h(\phi_h) \in P_0(\Omega) \quad \forall\, \phi_h \in \Phi_h$, $\mathcal{L}_h(\phi_h) \cdot \boldsymbol{\nu} = \phi_h \quad \text{en} \quad \Gamma \quad \forall\, \phi_h \in \Phi_h$, y

$$\sup_{\substack{\phi_h \in \Phi_h \\ \phi_h \neq 0}} \frac{\langle \phi_h, \lambda_h \rangle_\Gamma}{\|\phi_h\|_{-1/2,\Gamma}} \geq \widetilde{\beta}\, \|\lambda_h\|_{1/2,\Gamma} \qquad \forall\, \lambda_h \in Q_h^\xi\,.$$

Pruebe en este caso que (1) verifica las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi discreto.

3. (2 Puntos) Sean X, M, y Q espacios de Hilbert reales, y defina el espacio producto $H := X \times M$. A su vez, considere $A_1 \in \mathcal{L}(X, X)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X, M)$, y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$, y defina los operadores $A : H \to H$ y $T : H \times Q \to H \times Q$ según la estructura matricial dada por:

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & B_1^* \\ B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Defina el esquema de Galerkin asociado al operador T y luego aplique la teoría de Babuška-Brezzi discreta para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen su solubilidad y estabilidad.

   b) Dados un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, y $K \in [C(\Omega)]^{n\times n}$ una matriz simétrica y uniformemente definida positiva, considere el problema de valores de contorno:

$$-\operatorname{div}\big(K\,\nabla u\big) = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = g \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

   Defina las variables auxiliares $\mathbf{t} := \nabla u$ y $\boldsymbol{\sigma} := K\,\nabla u = K\,\mathbf{t}$ en Ω, y demuestre que el operador que representa la formulación mixta resultante tiene la forma de T con incógnitas $\mathbf{t} \in X := [L^2(\Omega)]^n$, $\boldsymbol{\sigma} \in M := H(\operatorname{div};\Omega)$, y $u \in Q := L^2(\Omega)$, y con operadores dados por $A_1(\mathbf{s}) := K\,\mathbf{s} \quad \forall\,\mathbf{s} \in X$, $B_1(\mathbf{s}) := -\mathbf{s} \quad \forall\,\mathbf{s} \in X$, y $B(\mathbf{s}, \boldsymbol{\tau}) := -\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} \quad \forall\,(\mathbf{s}, \boldsymbol{\tau}) \in H$.

   c) Defina subespacios de elementos finitos X_h, M_h, y Q_h de X, M, y Q, respectivamente, con los cuales se cumplan las hipótesis deducidas en a).

4. (1.5 Puntos) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal Γ. Dado $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, el esquema de Galerkin para la formulación mixta del Problema de Stokes con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas se reduce, luego de eliminar la incógnita presión, a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in H_h \times Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\,\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{\tau}_h^{\mathtt{d}} + \int_\Omega \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\tau}_h &= 0 \quad \forall\,\boldsymbol{\tau}_h \in H_h \\ \int_\Omega \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}_h &= -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_h \quad \forall\,\mathbf{v}_h \in Q_h\,, \end{aligned} \tag{2}$$

   donde μ es la viscosidad cinemática del fluido, y H_h y Q_h son, respectivamente, subespacios de elementos finitos de

$$H := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div};\Omega) : \quad \int_\Omega \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} = 0 \right\} \quad \text{y} \quad Q = [L^2(\Omega)]^2\,.$$

   Defina explícitamente un caso particular de H_h y Q_h con los cuales (2) resulta únicamente soluble, estable y convergente.

GGP/ggp