UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PRUEBA 2

Métodos de Elementos Finitos Mixtos (525539).

Jueves, 17 de Julio de 2008 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal, y considere la formulación variacional: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\,\mu}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} + \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau} &= 0 \quad \forall\,\boldsymbol{\tau}\in H\,,\\ \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} &= -\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \quad \forall\,\mathbf{v}\in Q\,, \end{aligned} \tag{1}$$

   donde μ es una constante positiva, $H := \left\{\boldsymbol{\tau}\in H(\mathbf{div}\,;\Omega) : \int_\Omega \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau} = 0\right\}$, $Q = [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{f}\in[L^2(\Omega)]^2$. Defina subespacios de elementos finitos apropiados $H_h \subseteq H$ y $Q_h \subseteq Q$, y pruebe que el esquema de Galerkin asociado a (1) es únicamente soluble, estable y convergente.

2. Sea T un triángulo de $\mathbb{R}^2$ con diámetro h_T y sea $\widehat{T}$ el triángulo canónico con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. A su vez, sea $F_T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación afín invertible tal que $F_T(\widehat{T}) = T$, y defina $\psi_T := \widehat{\psi}\circ F_T^{-1}$, donde $\widehat{\psi}$ es la función burbuja de $\widehat{T}$. Además, sea $\mathcal{P}_0$ el proyector ortogonal de $L^2(T)$ en $\mathbb{P}_0(T)$, el espacio de polinomios constantes sobre T, con respecto al producto escalar

$$\langle f, g\rangle := \int_T \psi_T\, f\, g \qquad \forall\, f,\, g\,\in\, L^2(T)\,.$$

   Aplique los lemas de Bramble-Hilbert y Deny-Lions para demostrar que existe $C > 0$, independiente de T, tal que:

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \,\le\, C\, h_T\, |v|_{1,T} \qquad \forall\, v\,\in\, H^1(T)\,.$$

   Dado $s \in]0,1[$, utilice argumentos de interpolación de espacios normados y el hecho que $(L^2(T), H^1(T))_{s,2} = H^s(T)$, para probar que existe $C_s > 0$, independiente de T, tal que

$$\|v - \mathcal{P}_0(v)\|_{0,T} \,\le\, C_s\, h_T^s\, \|v\|_{s,T} \qquad \forall\, v\,\in\, H^s(T)\,.$$

Cada problema vale 3 puntos.
