UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2, 525402

Análisis Funcional y Aplicaciones II

Sabado, 28 de Enero de 2012 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea u una forma lineal sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pruebe que u es continua (distribución temperada) si y sólo si existen $C > 0$ y un entero no-negativo N tales que

$$|\langle u, \varphi\rangle| \;\le\; C \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le N} \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\, x^\alpha\, \partial^\beta \varphi(x)\,| \right\} \qquad \forall\, \varphi \,\in\, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

2. Demuestre que para toda $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para todo multiíndice α, y para cada $h \in \mathbb{R}^n$, se tiene

   i) $\widehat{D^\alpha u} \,=\, \xi^\alpha\, \widehat{u}$ ii) $\widehat{x^\alpha u} \,=\, (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha\, \widehat{u}$

   iii) $\widehat{\tau_h u} \,=\, e^{-i\,\xi\cdot h}\, \widehat{u}$ iv) $\widehat{e^{i\,x\cdot h}\, u} \,=\, \tau_h\, \widehat{u}$

   Deduzca, a partir de estas identidades, que $\widehat{D^\alpha \delta} \,=\, \xi^\alpha$ y $\widehat{x^\alpha} \,=\, (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha\, \delta$, probando primero que $\widehat{\delta} = 1$

3. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ tal que $x_1\, u_n = (x_2 - \frac{1}{n})\, u_n = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ y $\langle u_n, 1\rangle \,=\, \dfrac{n-1}{n+1}$ $\forall\, n \,\in\, \mathbf{N}$. Justifique la coherencia de estas hipótesis y encuentre, si es posible, el limite distribucional de u_n cuando $n \longrightarrow +\infty$.

4. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sean $x_0,\, x_1 \,\in\, \Omega$ tales que $x_0 \,\neq\, x_1$. Suponga que $u \,\in\, \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\operatorname{sop} u \,=\, \{x_0, x_1\}$.

   i) Demuestre que existen enteros no negativos N_0, N_1, y constantes $c_\alpha\,,\, d_\beta \,\in\, \mathbb{C}$, $|\alpha| \,\le\, N_0$, $|\beta| \,\le\, N_1$, tales que $\forall\, \varphi \,\in\, \mathcal{D}(\Omega)$

   $$\langle u, \varphi\rangle \;=\; \sum_{|\alpha|\le N_0} c_\alpha\, \langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi\rangle \;+\; \sum_{|\beta|\le N_1} d_\beta\, \langle \partial^\beta \delta_{x_1}, \varphi\rangle\,.$$

   ii) Extienda el resultado anterior al caso en que $\operatorname{sop} u \,=\, \{\, x_0, x_1, ..., x_N\,\}$, con $x_i{\neq}x_j$ para todo $i{\neq}j \,\in\, \{1, 2, ..., N\}$.

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PUNTOS

GGP/ggp