UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2, 525402

Análisis Funcional y Aplicaciones II

Viernes, 15 de Diciembre de 2006 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean H un Hilbert complejo y $A \in \mathcal{L}(H,H)$ un operador autoadjunto. Dado un subespacio cerrado S de H invariante con respecto a A, denote por $\sigma(A,S)$ y $\sigma(A,S^\perp)$ los espectros de las restricciones $A|_S$ y $A|_{S^\perp}$, respectivamente. Demuestre que $\sigma(A) = \sigma(A,S) \cup \sigma(A,S^\perp)$.

(1 PUNTO)

2. i) Pruebe que $VP(\frac{1}{x}) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle VP(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

es una distribución sobre $\mathbb{R}$.

ii) Demuestre que $(log\,|x|)' = VP(\frac{1}{x})$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(1 PUNTO)

3. Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbf{N}$ y $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ una sucesión acotada de $H^m(\Omega)$ tal que $u_k \overset{k\to\infty}{\to} u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Demuestre que $u \in H^m(\Omega)$.

(1 PUNTO)

4. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1 y defina el espacio

$$\mathcal{D}(\Gamma) := \{\, v|_\Gamma : \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \,\}.$$

Pruebe que $\mathcal{D}(\Gamma)$ es denso en $H^{1/2}(\Gamma)$.

(1 PUNTO)

5. Sea u una forma lineal sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pruebe que u es continua (distribución temperada) si y sólo si existen $C > 0$ y un entero no-negativo N tales que

$$|\,\langle u, \varphi \rangle\,| \;\leq\; C \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leq N} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\, x^\alpha\, \partial^\beta \varphi(x)\,| \right\} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

(1 PUNTO)

6. Trabajo y exposición.

(1 PUNTO)

GGP/ggp