UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401)

Miércoles 13 de Julio de 2016 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean X, Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $N(A) = \{0\}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) A admite un inverso a izquierda, es decir existe un operador $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $B\,A = I : X \to X$.

   b) $R(A)$ es cerrado y posee un suplemento topológico en Y.

2. Sean H y Q espacios de Hilbert reales, y sean $a : H \times H \to \mathbb{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbb{R}$ formas bilineales que verifican las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi Continuo.

   a) Considere el operador $T : H \times Q \to (H \times Q)' \equiv H' \times Q'$ que a cada $(\zeta, w) \in H \times Q$ le asigna $T(\zeta, w) := (F_{\zeta,w}, G_\zeta)$, donde $F_{\zeta,w} : H \to \mathbb{R}$ y $G_\zeta : Q \to \mathbb{R}$ son los funcionales definidos por

   $$F_{\zeta,w}(\tau) := a(\zeta,\tau) + b(\tau,w) \quad \forall\, \tau \in H \quad \text{y} \quad G_\zeta(v) := b(\zeta,v) \quad \forall\, v \in Q\,.$$

   Demuestre que T está bien definido, y luego aplique el Teorema de la Inversa Acotada para deducir la existencia de una constante $C > 0$ tal que, para todo $(\zeta, w) \in H \times Q$ se tiene

   $$C\,\|(\zeta,w)\|_{H\times Q} \le \sup_{\substack{(\tau,v)\in H\times Q\\ (\tau,v)\neq(0,0)}} \frac{|a(\zeta,\tau) + b(\tau,w) + b(\zeta,v)|}{\|(\tau,v)\|_{H\times Q}}\,. \tag{1}$$

   b) Dados $F \in H'$ y $G \in Q'$, denote por $(\sigma, u) \in H \times Q$ a la única solución de

   $$\begin{aligned} a(\sigma,\tau) + b(\tau,u) &= F(\tau) \qquad \forall\, \tau \in H\,,\\ b(\sigma,v) &= G(v) \qquad \forall\, v \in Q\,, \end{aligned} \tag{2}$$

   y sea $(\sigma_h, u_h) \in H_h \times Q_h$ una solución de Galerkin asociada, donde H_h y Q_h son subespacios de dimensión finita de H y Q, respectivamente, que satisfacen las hipótesis del Teorema de Babuška-Brezzi discreto. Aplique entonces lo obtenido en a), y deduzca la estimación de error a posteriori

   $$\|(\sigma,u) - (\sigma_h,u_h)\|_{H\times Q} \le c\left\{\|\mathcal{R}_h\|_{H'} + \|\mathcal{S}_h\|_{Q'}\right\},$$

   donde $c > 0$ es independiente de h, y $\mathcal{R}_h \in H'$ y $\mathcal{S}_h \in Q'$ están dados por

   $$\begin{aligned} \mathcal{R}_h(\tau) &:= F(\tau) - a(\sigma_h,\tau) - b(\tau,u_h) \qquad \forall\, \tau \in H\,,\\ \mathcal{S}_h(v) &:= G(v) - b(\sigma_h,v) \qquad \forall\, v \in Q\,. \end{aligned}$$

3. Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados.

   a) Demuestre que $\mathcal{K}(X,Y)$ es subespacio de $\mathcal{L}(X,Y)$.

   b) Pruebe que, dados $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z,X)$, y $K \in \mathcal{K}(Y,Z)$, se tiene que KA y BK son compactos.

   c) Pruebe que, dados $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Z,X)$, y $K \in \mathcal{L}(Y,Z)$ de rango finito, se tiene que KA y BK son de rango finito.

4. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$ converge débilmente a $x \in X$, y se escribe $x_n \xrightarrow{w} x$, si

$$F(x_n) \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} F(x) \qquad \forall\, F \in X' .$$

   a) Demuestre que el límite débil x es único, y luego aplique el Teorema de Banach-Steinhaus para deducir que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

   b) Dados $(Y, \|\cdot\|_Y)$ otro espacio vectorial normado y $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, demuestre que K transforma convergencia débil en convergencia fuerte, esto es,

$$x_n \xrightarrow{w} x \qquad \Longrightarrow \qquad \|K(x_n) - K(x)\|_Y \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

   Para ello, pruebe primero que $K(x_n) \xrightarrow{w} K(x)$, y luego razone por contradicción observando que, si una determinada sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a z, entonces existen $\delta > 0$ y una subsucesión $\{z_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|z_n^{(1)} - z\| \geq \delta \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

CADA PROBLEMA VALE 1.5 PUNTOS

GGP/ggp