UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401)

Viernes 19 de Julio de 2013 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Dados H, Q_1 y Q_2 espacios de Hilbert reales, defina $Q := Q_1 \times Q_2$ y considere formas bilineales acotadas $b : H \times Q \to \mathbb{R}$, $b_1 : H \times Q_1 \to \mathbb{R}$ y $b_2 : H \times Q_2 \to \mathbb{R}$, con operadores inducidos denotados por $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$, respectivamente, tales que

$$b(\boldsymbol{\tau}, (v, \psi)) \,=\, b_1(\boldsymbol{\tau}, v) \,+\, b_2(\boldsymbol{\tau}, \psi) \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \quad \forall\, (v, \psi) \,\in\, Q\,.$$

Pruebe en primer lugar que $\mathbf{B}(\boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\tau})) \in Q \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H$. Luego, introduzca los espacios nulos $V_1 := N(\mathbf{B}_1)$ y $V_2 := N(\mathbf{B}_2)$, y demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in H \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, (v, \psi))}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \,\geq\, \beta \, \|(v, \psi)\|_Q \qquad \forall\, (v, \psi) \in Q\,.$$

b) existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in V_1 \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b_2(\boldsymbol{\tau}, \psi)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \beta \, \|\psi\|_{Q_2} \quad \forall\, \psi \in Q_2 \quad \text{y} \quad \sup_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in V_2 \\ \boldsymbol{\tau} \neq 0}} \frac{b_1(\boldsymbol{\tau}, v)}{\|\boldsymbol{\tau}\|_H} \geq \beta \, \|v\|_{Q_1} \quad \forall\, v \in Q_1\,.$$

Extienda el resultado anterior al caso en que b se escribe como suma de n formas bilineales acotadas $b_i : H \times Q_i \to \mathbb{R}$, con $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ espacios de Hilbert reales.

[1.5 PTOS.]

2. Sean $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ y $(X_3, \|\cdot\|_3)$, espacios de Banach, y considere operadores $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ y $K \in \mathcal{K}(X_1, X_3)$ para los cuales existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \,\leq\, c \Big\{ \|A(x)\|_2 \,+\, \|K(x)\|_3 \Big\} \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

Demuestre que $N(A)$ es de dimensión finita, y luego razone por contradicción, utilizando una argumentación muy similar a la empleada en el Lema 5.4 del apunte complementario sobre la alternativa de Fredholm, para probar que $R(A)$ es cerrado, esto es existe $C > 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, N(A)) \,\leq\, C \, \|A(x)\|_2 \qquad \forall\, x \in X_1\,.$$

[2 PTOS.]

3. Dados Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, y constantes $\kappa_1,\, \kappa_2 \in \mathbb{R}$, considere el problema:

$$-\,\Delta u \,+\, \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,+\, \kappa_2\, u \,=\, f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u \,=\, 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{1}$$

Deduzca la formulación primal de (1) y encuentre la mayor región factible para $(\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ que asegura, mediante el Lema de Lax-Milgram clásico, que dicha formulación tiene una única solución. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado y establezca la estimación de Cea en términos de κ_1 y κ_2.

INDICACIÓN: recordar la fórmula de integración por partes que dice que

$$\int_\Omega v\,\frac{\partial w}{\partial x_i} \;=\; -\int_\Omega w\,\frac{\partial v}{\partial x_i} \,+\, \int_\Gamma v\,w\,\nu_i \qquad \forall\, v,\, w \,\in\, H^1(\Omega)\,, \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}\,,$$

donde $\boldsymbol{\nu} := (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ es el vector normal unitario en Γ.

[1 PTO.]

4. Dados X, M y Q espacios de Hilbert reales, defina $H := X \times M$ y considere operadores $A_1 \in \mathcal{L}(X, X)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X, M)$ y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$. A su vez, sean $A : H \to H$ y $T : H \times Q \to H \times Q$ los operadores definidos matricialmente por

$$A \,:=\, \begin{pmatrix} A_1 & B_1^* \\ B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad T \,:=\, \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}\,.$$

a) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen la biyectividad de T.

b) Establezca un esquema de Galerkin asociado al operador T y demuestre la estimación de Cea correspondiente.

[1.5 PTOS.]

5. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert real y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada cuyo operador inducido $A \in \mathcal{L}(H)$ es biyectivo. Dados un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\} \subseteq H$ y $F \in H'$, considere la formulación variacional: Hallar $u \in H$ tal que

$$a(u, v) \,-\, \sum_{j=1}^{N} \langle u, u_j\rangle\,\langle v, u_j\rangle \;=\; F(v) \qquad \forall\, v \in H\,. \tag{2}$$

Deduzca una condición necesaria y suficiente sobre $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\}$ que garantice que para cada $F \in H'$ el problema (2) tiene una única solución.

[1.5 PTOS.]

ELIJA UN CONJUNTO DE PROBLEMAS CUYA SUMA DE PUNTOS SEA ≤ 6.0

GGP/ggp