UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401)

Jueves 30 de Diciembre de 2010 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}$, considere los espacios de Hilbert reales dados por $X := L^2(\Omega)$ e $Y := \mathbb{R}^{2\times 2}$ provistos de los productos escalares

$$\langle u, v\rangle_X := \int_\Omega u\, v \quad \forall\, u,\, v \in X\,, \qquad \langle A, B\rangle_Y := \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}\, B) \quad \forall\, A,\, B \in Y\,,$$

y defina el operador $\mathcal{A} : X \to Y$ por

$$\mathcal{A}(u) := \begin{pmatrix} \displaystyle\int_\Omega u & \displaystyle\int_\Omega x\, u \\ \displaystyle\int_\Omega x\, u & \displaystyle\int_\Omega x^2\, u \end{pmatrix} \qquad \forall\, u \in X\,.$$

   i) Demuestre que $\mathcal{A}$ es lineal y acotado y calcule explícitamente el operador adjunto $\mathcal{A}^*$ y los espacios $N(\mathcal{A})$, $R(\mathcal{A})$, $N(\mathcal{A}^*)$ y $R(\mathcal{A}^*)$.

   ii) Encuentre un subespacio cerrado S de X tal que $\mathcal{A}|_S : S \to R(\mathcal{A})$ sea biyectivo.

   iii) Defina $\tilde{Y} := \{B \in Y : \quad B^{\mathrm{t}} = -B\}$ y demuestre que existe $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{A}^*(A)\|_X \geq C \inf_{B\in\tilde{Y}} \|A - B\|_Y \quad \forall\, A \in Y\,.$$

   iv) Reemplace $X := L^2(\Omega)$ por $X := H^1(\Omega)$ con su producto escalar habitual, y recalcule el operador adjunto $\mathcal{A}^*$. [**2 puntos**]

2. Sean X, Y_1 e Y_2 espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, y sean $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq X \to Y_1$ y $A_2 : \mathcal{D}(A_2) \subseteq X \to Y_2$ operadores lineales cerrados. Considere el espacio producto $Y := Y_1 \times Y_2$ y demuestre que el operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, definido por $A(x) := (A_1(x), A_2(x))\ \forall\, x \in \mathcal{D}(A) := \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2)$, también es cerrado. Recíprocamente, suponga que $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ es lineal cerrado, y que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $\{A_i(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y_i, $i \in \{1, 2\}$, existe una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para la cual $\{A_j(x_n^{(1)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y_j, $\forall\, j \in \{1, 2\}$. Demuestre en tal caso que para cada $i \in \{1, 2\}$, $A_i|_{\mathcal{D}(A)}$ es cerrado. [**1 punto**]

3. Enuncie el TEOREMA DE BABUŠKA-BREZZI y demuestre que sus hipótesis son también necesarias. [**1 punto**]

4. Considere el espacio $\ell_2(\mathbb{C}) := \left\{ \mathbf{u} := \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \ u_n \in \mathbb{C}, \ \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}$, y demuestre que el operador $K : \ell_2(\mathbb{C}) \to \ell_2(\mathbb{C})$ definido por

$$K\,(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_k}{k}, ...) \qquad \forall\,(x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in \ell_2(\mathbb{C})\,,$$

es compacto. [**1 punto**]

5. Sea X un espacio vectorial normado de dimensión INFINITA. Demuestre que el operador identidad $I \in \mathcal{L}(X, X)$ no es compacto. [**1 punto**]

6. Determine, **justificadamente**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   i) Todo operador lineal, acotado y biyectivo de un Banach X en un Banach Y es compacto.

   ii) Dados H y Q espacios de Hilbert se tiene que $A \in \mathcal{L}(H, Q)$ es biyectivo si y sólo si $A^* \in \mathcal{L}(Q, H)$ es biyectivo.

   iii) Existen operadores compactos que no son cerrados.

   iv) Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, también es cerrado.

   v) Dados X e Y espacios de Banach, el inverso de un operador lineal, cerrado y biyectivo $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, es acotado.

   vi) Dados X e Y espacios de Banach, Y de dimensión finita, y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, el rango del operador adjunto $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$ es cerrado.

[**2 puntos**]

RESPONDA TODAS LAS PREGUNTAS QUE DESEE CUYA SUMA DE PUNTOS SEA ≤ 6

GGP/ggp