UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 2

Análisis Funcional y Aplicaciones I (525401).

Martes 1 de Agosto de 2006 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean $(X, \|\cdot\|)$, $(X_1, \|\cdot\|_1)$ y $(X_2, \|\cdot\|_2)$ espacios de Banach, y considere operadores lineales $T_1 : X \to X_1$ y $T_2 : X \to X_2$ tales que $\mathcal{D}(T_1) \subseteq \mathcal{D}(T_2)$, T_1 es cerrado y T_2 admite clausura. Demuestre que existe $C > 0$ tal que
$$\|T_2(u)\|_2 \,\le\, C\,\{\,\|T_1(u)\|_1 \,+\, \|u\|\,\} \qquad \forall\, u \,\in\, \mathcal{D}(T_1)\,.$$

2. Sean $a,\, b \,\in\, \mathbb{R}$ tal que $-\infty < a < b < +\infty$. Asuma que $C[a,b]$ es separable, y demuestre que para todo entero no negativo k, $C^k[a,b]$ también es separable.

3. Sea X el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $[0,1]$ provisto de la norma uniforme. Dados u_1, u_2, $y \,\in\, X$, considere la ecuación integral: *Hallar* $u \in X$ *tal que*
$$u(t) - \int_0^1 u_1(t)\, s^2\, u(s)\, ds - \int_0^1 u_2(t)\, (1 - \frac{3}{2}s)\, u(s)\, ds \;=\; y(t) \quad \forall\, t \,\in\, [0,1]\,. \quad (1)$$
   i) Si $u_1(t) \,=\, 4t$ y $u_2(t) \,=\, 1$ $\forall\, t \in [0,1]$, deduzca una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (1) tenga al menos una solución.
   ii) Pruebe que si $u_1(t) \,=\, t$ y $u_2(t) \,=\, 1$, entonces para cada $y \,\in\, X$ la ecuación integral (1) tiene una única solución.

4. Sea $K \,:\, [0,1] \times [0,1] \,\to\, \mathbb{R}$ una función continua y defina el operador integral $\mathbf{K} : C[0,1] \to C[0,1]$ por
$$\mathbf{K}(u)(t) \,:=\, \int_0^1 K(t,s)\, u(s)\, ds \qquad \forall\, t \,\in\, [0,1]\,, \quad \forall\, u \,\in\, C[0,1]\,.$$
   Aplique el Teorema de Arzelá - Ascoli para probar que $\mathbf{K}$ es compacto.

5. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Asuma que la inyección $i \,:\, H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es compacta y demuestre que la inyección $i \,:\, H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ también es compacta, para todo entero $m \ge 2$.

CADA PROBLEMA VALE 1.2 PUNTOS.

GGP/ggp