UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1

Métodos de Elementos Finitos Mixtos (525539).

Miércoles, 14 de Noviembre de 2012 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. (1 Punto) Establezca fundadamente la veracidad o no de las siguientes afirmaciones:

   i) En una formulación mixta típica con formas bilineales a y b, la elipticidad de a en el kernel de b es una condición necesaria para la unicidad de la solución.

   ii) Para cada tensor $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega)$ cuya componente normal se anula en un subconjunto de medida no nula de la frontera Γ, se tiene que $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathrm{div};\Omega}$ es equivalente a $\|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\mathrm{div};\Omega}$, donde $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + c\,\mathbf{I}$, con $\boldsymbol{\sigma}_0 \in H_0$ y $c \in \mathbb{R}$.

2. (2 Puntos) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$ y vector normal respectivo dado por $\mathbf{n}$. Entonces, dados $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y constantes κ_1, $\kappa_2 \in \mathbb{R}$, $\kappa_2 \neq 0$, considere el problema de Neumann:

$$- \Delta u + \kappa_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \kappa_2 \, u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad \nabla u \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{1}$$

   En lo que sigue, $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ es la aplicación de trazas y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la paridad dual entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $H^{1/2}(\Gamma)$.

   a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ en Ω y $\xi := -\gamma_0(u)$ en Γ, y demuestre que, eliminando u, la formulación variacional mixta de (1) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \xi) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{array}{rcll} a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau},\xi) & = & F(\boldsymbol{\tau}) & \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma},\lambda) & = & G(\lambda) & \forall\, \lambda \in Q\,, \end{array} \tag{2}$$

   donde $H := H(\mathrm{div};\Omega)$, $Q := H^{1/2}(\Gamma)$, y $a : H \times H \to \mathbb{R}$, $b : H \times Q \to \mathbb{R}$, $F \in H'$, y $G \in Q'$ están definidos, para cada $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau} \in H$ y $\lambda \in Q$, por

$$a(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) := \int_\Omega \Big\{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\kappa_2} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \Big\}\,,$$

$$b(\boldsymbol{\tau},\lambda) := \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}, \lambda \rangle\,, \quad F(\boldsymbol{\tau}) := -\frac{1}{\kappa_2} \int_\Omega f \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\,, \quad \text{y} \quad G(\lambda) := \langle g, \lambda \rangle\,.$$

   b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para demostrar que, para cada par $(\kappa_1,\kappa_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\kappa_2 > 0$ y $|\kappa_1| < \frac{2}{\sqrt{n}} \min\big\{1, \kappa_2\big\}$, el problema (2) posee una única solución, la cual depende continuamente de los datos f y g. A su vez, defina el esquema de Galerkin asociado a (2) y establezca la estimación de Cea correspondiente en términos de κ_1 y κ_2.

3. (2 Puntos) Sea Ω un abierto acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^{0,1}$, y sea $H^{-1}(\Omega)$ (resp. $[H^{-1}(\Omega)]^n$) el dual de $H_0^1(\Omega)$ (resp. $[H_0^1(\Omega)]^n$).

   a) Utilice que $[C_0^\infty(\Omega)]^n$ es denso en $[H_0^1(\Omega)]^n$ para extender el gradiente distribucional $\nabla : L^2(\Omega) \to [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$ a un operador $\nabla \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), [H^{-1}(\Omega)]^n)$.

   b) Sea $B := \mathcal{R}\,\nabla \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), [H_0^1(\Omega)]^n)$, donde $\mathcal{R} : [H^{-1}(\Omega)]^n \to [H_0^1(\Omega)]^n$ es la aplicación de Riesz respectiva, y encuentre explícitamente el operador adjunto $B^* : [H_0^1(\Omega)]^n \to L^2(\Omega)$.

   c) Asuma que existe $C > 0$ tal que $\mathrm{dist}(v, S) \le C\,\|B(v)\| \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)$, donde $S := \langle\{1\}\rangle$, y luego haga uso de resultados clásicos de análisis funcional para probar que el operador $\mathrm{div} : V^\perp \to L_0^2(\Omega)$ es un isomorfismo, donde

$$V := \Big\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^n : \ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \Big\}, \qquad [H_0^1(\Omega)]^n = V \oplus V^\perp,$$

   y

$$L_0^2(\Omega) := \Big\{ p \in L^2(\Omega) : \ \int_\Omega p = 0 \Big\}.$$

4. (2 Puntos) Sea Ω un dominio anular de $\mathbb{R}^2$ con fronteras interior y exterior, ambas Lipschitz continuas, dadas por Σ y Γ, respectivamente, y considere datos $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El Problema de Stokes con condiciones de contorno mixtas consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathsf{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{aligned} -\mu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} &= 0 && \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mu\,\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - p\,\mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{en} \quad \Gamma\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{en} \quad \Sigma\,, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido y $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ. Introduzca las incógnitas auxiliares $\varphi := -\,\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, luego elimine p, y finalmente aplique la Teoría de Babuška -Brezzi para analizar la solubilidad de la formulación variacional mixta resultante.

GGP/ggp