

EVALUACION 1 525539
MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS

Martes 3 de Mayo de 2011

Prof. Gabriel N. Gatica.

1. [3 puntos] Sea Ω_1 un abierto conexo y acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ , y sea Ω_2 la region anular acotada por Γ y una curva cerrada Σ cuyo interior contiene a Γ . Además, sean $\gamma_0^1 : \mathbf{H}^1(\Omega_1) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_0^2 : \mathbf{H}^1(\Omega_2) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma)$ los operadores de trazas respectivos, y denote $\Omega := \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$. Dados $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega_1)$, $\mathbf{f}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\mathbf{g}_\Gamma \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{g}_\Sigma \in \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma)$, considere el problema de transmisión en ELASTICIDAD LINEAL

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1 &= \mathcal{C}_1 \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \quad \text{en } \Omega_1, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{f}_1 \quad \text{en } \Omega_1, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 &= \mathcal{C}_2 \mathbf{e}(\mathbf{u}_2) \quad \text{en } \Omega_2, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{f}_2 \quad \text{en } \Omega_2, \\ \gamma_0^1(\mathbf{u}_1) - \gamma_0^2(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{g}_\Gamma \quad \text{en } \Gamma, \quad \gamma_\nu^1(\boldsymbol{\sigma}_1) = \gamma_\nu^2(\boldsymbol{\sigma}_2) \quad \text{en } \Gamma, \\ \gamma_0^2(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{g}_\Sigma \quad \text{en } \Sigma, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\mathcal{C}_i : \mathbb{L}^2(\Omega_i) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega_i)$, $i \in \{1, 2\}$, son los operadores lineales de Hooke en los dominios Ω_1 y Ω_2 con constantes de Lamé (μ_1, λ_1) y (μ_2, λ_2) , respectivamente, y $\gamma_\nu^1 : \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega_1) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\gamma_\nu^2 : \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega_2) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Sigma)$ son los operadores de trazas normales correspondientes (ν apunta hacia Ω_2 en Γ y hacia el exterior de Ω_2 en Σ).

- a) Demuestre que una FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA-DUAL de (1) se reduce a: Hallar $\boldsymbol{\sigma} := (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) \in \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega_1) \times \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega_2)$, $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega_1) \times \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\boldsymbol{\rho} := (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \in \mathbb{L}_{\text{asim}}^2(\Omega_1) \times \mathbb{L}_{\text{asim}}^2(\Omega_2)$, y $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \mathcal{C}_i^{-1} \boldsymbol{\sigma}_i : \boldsymbol{\tau}_i + \tilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})) + \langle \gamma_\nu^1(\boldsymbol{\tau}_1) - \gamma_\nu^2(\boldsymbol{\tau}_2), \boldsymbol{\xi} \rangle_\Gamma &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}), \\ \tilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})) + \langle \gamma_\nu^1(\boldsymbol{\sigma}_1) - \gamma_\nu^2(\boldsymbol{\sigma}_2), \boldsymbol{\lambda} \rangle_\Gamma &= \mathbf{G}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}), \end{aligned} \tag{2}$$

para todo $\boldsymbol{\tau} := (\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \in \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega_1) \times \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega_2)$, $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega_1) \times \mathbf{L}^2(\Omega_2)$, $\boldsymbol{\eta} := (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) \in \mathbb{L}_{\text{asim}}^2(\Omega_1) \times \mathbb{L}_{\text{asim}}^2(\Omega_2)$, y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, donde $\tilde{\mathbf{b}}$ es una forma bilineal, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denota la paridad dual entre $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ y $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, y $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son funcionales lineales y acotados que dependen de $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}_\Gamma$ y $\mathbf{g}_\Sigma$.

- b) Escriba (2) en la forma requerida por el Teorema de Babuška-Brezzi, identificando claramente los espacios H y Q involucrados, las formas bilineales $\mathbf{a} : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ y $\mathbf{b} : H \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ resultantes, y los operadores lineales inducidos por ellas. Concluya luego que este problema posee una única solución $(\boldsymbol{\sigma}, (\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi})) \in H \times Q$, la cual depende continuamente de los datos.

2. [2 puntos] Sean X_1, M_1, X_2, M_2 y Q espacios de Hilbert reales, y defina el espacio producto $H := X_1 \times M_1 \times X_2 \times M_2$. A su vez, considere operadores $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_1)$, $B_1 \in \mathcal{L}(X_1, M_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(X_2, X_2)$, $B_2 \in \mathcal{L}(X_2, M_2)$, y $B \in \mathcal{L}(H, Q)$, y defina los operadores matriciales $A : H \rightarrow H$ y $T : H \times Q \rightarrow H \times Q$ como:

$$A := \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1^* & & \\ B_1 & 0 & & \\ \hline & & A_2 & B_2^* \\ & & B_2 & 0 \end{array} \right)$$

y

$$T := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Aplique la teoría de Babuška-Brezzi para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen la biyectividad de T .
 - b) Establezca un esquema de Galerkin asociado al operador T y demuestre la estimación de Cea correspondiente.
3. [1 punto] Considere un abierto acotado Ω de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ suficientemente suave, y defina el espacio

$$H(\text{rot}; \Omega) := \left\{ v := (v_1, v_2) \in [L^2(\Omega)]^2 : \quad \text{rot } v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\}$$

provisto del producto escalar

$$\langle v, w \rangle_{H(\text{rot}; \Omega)} := \int_{\Omega} v \cdot w \, dx + \int_{\Omega} \text{rot } v \, \text{rot } w \, dx \quad \forall v, w \in H(\text{rot}; \Omega).$$

- a) Demuestre que $(H(\text{rot}; \Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\text{rot}; \Omega)})$ es un espacio de Hilbert.
- b) Pruebe que existe un operador lineal y continuo $\gamma : H(\text{rot}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\gamma(u) = u \cdot \tau \, \forall u \in [C_0^\infty(\bar{\Omega})]^2$, donde τ es el vector **tangencial** a Γ .