UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EVALUACION 1

Métodos de Elementos Finitos Mixtos (525539).

Miércoles, 23 de Junio de 2010 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean $\Omega =]0,1[$, $f \in L^2(\Omega)$, y considere el problema de valores de contorno:

$$u^{(4)} \, = \, f \quad \text{en} \quad \Omega \,, \quad u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) \, = \, 0 \,. \tag{1}$$

   a) Defina la incógnita auxiliar $\sigma := u''$ en Ω y demuestre que una formulación variacional mixta de (1) se reduce a: Hallar $(\sigma, u) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma\,\tau\,dx + \int_\Omega u'\,\tau'\,dx \, &= \quad 0 \qquad \forall\,\tau \in H^1(\Omega)\,, \\ \int_\Omega v'\,\sigma'\,dx \, &= \, - \int_\Omega f\,v\,dx \qquad \forall\,v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

   b) Use la teoría de Babuska-Brezzi para demostrar que (2) tiene una única solución que depende continuamente de f.

2. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ con frontera Γ de clase $C^{0,1}$. El objetivo de este problema es demostrar que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;\geq\; \frac{1}{2}\,|\mathbf{v}|^2_{[H^1(\Omega)]^2} \qquad \forall\,\mathbf{v} \,\in\, [H_0^1(\Omega)]^2\,, \tag{3}$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{v}) \,:=\, \dfrac{1}{2}\Big\{\nabla\mathbf{v} \,+\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$. Para tal efecto, defina

$$\mathbf{w}(\mathbf{v}) \,:=\, \frac{1}{2}\Big\{\nabla\mathbf{v} \,-\, (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}\Big\}$$

y pruebe que

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;-\; \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;=\; \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}}$$

y

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;+\; \|\mathbf{w}(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^{2\times 2}} \;=\; \int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v}\,.$$

Luego, deduzca la identidad $\nabla\mathbf{v} : (\nabla\mathbf{v})^{\mathtt{t}} \,=\, \operatorname{div}\Big\{\nabla\mathbf{v}\,\mathbf{v} - \operatorname{div}(\mathbf{v})\,\mathbf{v}\Big\} + (\operatorname{div}(\mathbf{v}))^2$ y concluya la desigualdad (3).

3. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Γ Lipschitz continua, y considere datos $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ y $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\Gamma)]^2$. El MODELO DE BRINKMAN para flujos en medios porosos con condiciones de contorno de Neumann, consiste en hallar la velocidad $\mathbf{u} := (u_1, u_2)^{\mathtt{t}}$ y la presión p de un fluido que ocupa la region Ω, tal que

$$\begin{array}{rcll} \alpha\,\mathbf{u} - \mu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p & = & \mathbf{f} & \text{en} \quad \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} & = & 0 & \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mu\,\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - p\,\mathbf{n} & = & \mathbf{g} & \text{en} \quad \Gamma\,, \end{array} \tag{4}$$

donde $\mu > 0$ es la viscosidad del fluido, α es un parámetro positivo dado por el cuociente entre la viscosidad y la permeabilidad, y $\mathbf{n}$ es el vector normal a Γ.

a) Introduzca las incógnitas auxiliares $\varphi := -\,\mathbf{u}$ en Γ y $\boldsymbol{\sigma} := \mu\,\nabla\mathbf{u} - p\,\mathbf{I}$ en Ω, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad en $\mathbf{R}^{2\times 2}$, y pruebe que, eliminando p y $\mathbf{u}$, se obtiene una formulación variacional mixta de la forma siguiente: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{array}{rcll} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \varphi) & = & F(\boldsymbol{\tau}) & \forall\,\boldsymbol{\tau} \in H\,, \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \psi) & = & G(\psi) & \forall\,\psi \in Q\,, \end{array} \tag{5}$$

donde $F \in H'$, $G \in Q'$, y $a : H \times H \to \mathbf{R}$ y $b : H \times Q \to \mathbf{R}$ son formas bilineales acotadas.

b) Use la teoría de Babuška-Brezzi para probar que (5) está bien propuesto.

c) Establezca condiciones suficientes sobre subespacios de elementos finitos $H_h \subseteq H$ y $Q_h \subseteq Q$ para que el esquema de Galerkin asociado a (5) tenga solución única, sea estable y convergente.

CADA PROBLEMA VALE 2 PUNTOS.

GNG/gng