UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

# PRUEBA 1

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS (525539).

Jueves, 5 de Junio de 2008 *Prof. Gabriel N. Gatica.*

1. Sean $H_1$, $H_2$, $Q_1$, $Q_2$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, y sean $a : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ y $b_j : H_j \times Q_j \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2\}$, formas bilineales acotadas con operadores inducidos $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $\mathbf{B}_j \in \mathcal{L}(H_j, Q_j)$, $j \in \{1,2\}$, respectivamente. También, sea $K_j$ el espacio nulo de $\mathbf{B}_j$, $j \in \{1,2\}$, y sea $\Pi_2$ el proyector ortogonal de $H_2$ en $K_2$. Suponga que:

   i) $\Pi_2\,\mathbf{A} : K_1 \to K_2$ es un isomorfismo.

   ii) existen $\beta_1$, $\beta_2 > 0$ tales que

   $$\|\mathbf{B}_j^*(q)\|_{H_j} := \sup_{\substack{v \in H_j \\ v \neq 0}} \frac{b_j(v,q)}{\|v\|_{H_j}} \geq \beta_j \, \|q\|_{Q_j} \quad \forall\, q \in Q_j, \quad \forall\, j \in \{1,2\}\,.$$

   Pruebe que, dados $F \in H_2'$ y $G \in Q_1'$, existe un único $(u,p) \in H_1 \times Q_2$ tal que

   $$\begin{aligned} a(u,v) \,+\, b_2(v,p) \;&=\; F(v) \quad \forall\, v \in H_2\,, \\ b_1(u,q) \;&=\; G(q) \quad \forall\, q \in Q_1\,. \end{aligned}$$

   Además, pruebe que la hipótesis i) es equivalente a cada una de las siguientes:

   a) existe $\alpha_1 > 0$ tal que

   $$\sup_{\substack{v \in K_2 \\ v \neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_{H_2}} \geq \alpha_1 \, \|u\|_{H_1} \qquad \forall\, u \in K_1$$

   y $\displaystyle\sup_{u \in K_1} a(u,v) > 0 \qquad \forall\, v \in K_2,\ v \neq 0.$

   b) existe $\alpha_2 > 0$ tal que

   $$\sup_{\substack{u \in K_1 \\ u \neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_{H_1}} \geq \alpha_2 \, \|v\|_{H_2} \qquad \forall\, v \in K_2$$

   y $\displaystyle\sup_{v \in K_2} a(u,v) > 0 \qquad \forall\, u \in K_1,\ u \neq 0.$

2. Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\Gamma$ suficientemente suave. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, considere el problema de Neumann:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = g \quad \text{en} \quad \Gamma, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal exterior a $\Gamma$.

a) Defina incógnitas auxiliares convenientes y demuestre que una formulación mixta de (1) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) \in H(\text{div};\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\text{div},\Omega} + \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}, \varphi \rangle_\Gamma &= -\int_\Omega f \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div};\Omega), \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}, \psi \rangle_\Gamma &= \langle g, \psi \rangle_\Gamma \quad \forall\, \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{div},\Omega}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denotan el producto interior de $H(\text{div};\Omega)$ y la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente.

b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (2) posee una única solución, la cual depende contínuamente de los datos $f$ y $g$.

c) Establezca condiciones suficientes sobre subespacios de elementos finitos $H_h \subseteq H(\text{div};\Omega)$ y $Q_h \subseteq H^{1/2}(\Gamma)$ para que el esquema de Galerkin asociado a (2) tenga solución única, sea estable y convergente.

3. Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal $\Gamma$. Dado $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, el problema de Stokes consiste en hallar un campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}$ (esfuerzo), un campo vectorial $\mathbf{u}$ (velocidad) y un campo escalar $p$ (presión) tal que:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\sigma} = 2\,\mu\, \nabla \mathbf{u} - p\, \mathbf{I} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma, \end{gathered} \tag{3}$$

donde $\mu$ es la viscosidad cinemática del fluido, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y $\mathbf{div}$ es el operador divergencia div actuando sobre cada fila del tensor.

a) Demuestre que, al eliminar la incógnita $p$, el problema (3) se transforma en:

$$\frac{1}{2\,\mu} \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} = \nabla \mathbf{u} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma. \tag{4}$$

b) Pruebe que la formulación variacional de (4) se reduce a: Hallar $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in H \times Q$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\,\mu} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{\mathtt{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathtt{d}} + \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\tau} &= 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in H \\ \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma} &= -\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in Q, \end{aligned} \tag{5}$$

donde $H := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div};\Omega) : \quad \int_\Omega \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} = 0 \right\}$ y $Q = [L^2(\Omega)]^2$.

c) Aplique un método similar al empleado con el problema de elasticidad y defina una formulación aumentada de (5) cuya forma bilineal resulte fuertemente coerciva.

4. Sea $\Omega$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal $\Gamma$. Dados $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, considere el problema de Dirichlet:

$$- \Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad u = g \quad \text{en} \quad \Gamma\,. \tag{6}$$

   a) Defina $\varphi := \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ en $\Gamma$, donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal exterior a $\Gamma$, y demuestre que una formulación mixta de (6) se reduce a: Hallar $(u, \varphi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\varphi) &= \int_\Omega f\, v \quad \forall\, v \in H^1(\Omega)\,, \\ b(u,\psi) &= \langle \psi, g\rangle_\Gamma \quad \forall\, \psi \in H^{-1/2}(\Gamma)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

   donde $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $b : H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \to \mathbb{R}$ son las formas bilineales definidas por

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \qquad \forall\, u,\, v \in H^1(\Omega),$$

$$b(v,\psi) = \langle \psi, v\rangle_\Gamma \qquad \forall\, (v,\psi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)\,,$$

   y $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denota la paridad dual de $H^{-1/2}(\Gamma)$ con $H^{1/2}(\Gamma)$.

   b) Aplique la Teoría de Babuška-Brezzi para probar que (7) posee una única solución, la cual depende contínuamente de los datos $f$ y $g$.

   c) Utilice la desigualdad de Poincaré generalizada para probar que $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $|\cdot|_{1,\Omega}$ son equivalentes en el espacio

$$\tilde{H}^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \quad \langle 1, v\rangle_\Gamma = 0 \right\}.$$

   d) Sean $H_h$ y $Q_h$ subespacios de elementos finitos de $H^1(\Omega)$ y $H^{-1/2}(\Gamma)$, respectivamente, tal que

$$Q_h := \{\psi_h \in L^2(\Gamma) : \quad \psi_h|_{\Gamma_j} \in \mathbb{P}_0(\Gamma_j) \quad \forall\, j \in \{1,2,...,m\}\}\,,$$

   donde $\{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m\}$ es una partición de $\Gamma$ y $\mathbb{P}_0(\Gamma_j)$ denota el espacio de constantes sobre $\Gamma_j$. Aplique la equivalencia de c) para demostrar que $a$ es fuertemente coerciva en el espacio nulo discreto de $b$. Además, indique las condiciones adicionales que deben satisfacer $H_h$ y $Q_h$ para que el esquema de Galerkin asociado a (7) tenga solución única, sea estable y convergente.

---

CADA PROBLEMA VALE 2 PUNTOS. DEBE ELEGIR SOLO 3 DE ELLOS.

---